



Kansen en kansmodellen

Zie ook:
Cursusboek hoofdstuk 22

Langharige gokkers



Blaise Pascal
(1623-1662)



Pierre de Fermat
(1607-1665)



Christiaan Huygens
(1607-1665)
“Van Rekeningh in spelen van geluck.” (1657)

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Begrippen

Kansexperiment:

experiment, gebeurtenis, proces met onzekere uitkomst.



Uitkomst:



Kansruimte:

Verzameling van alle mogelijke uitkomsten.



Kansvariabele:

Functie van de uitkomst.

Aantal ogen X , of X^2 , of $X - 3.5$, of ...

Gebeurtenis:

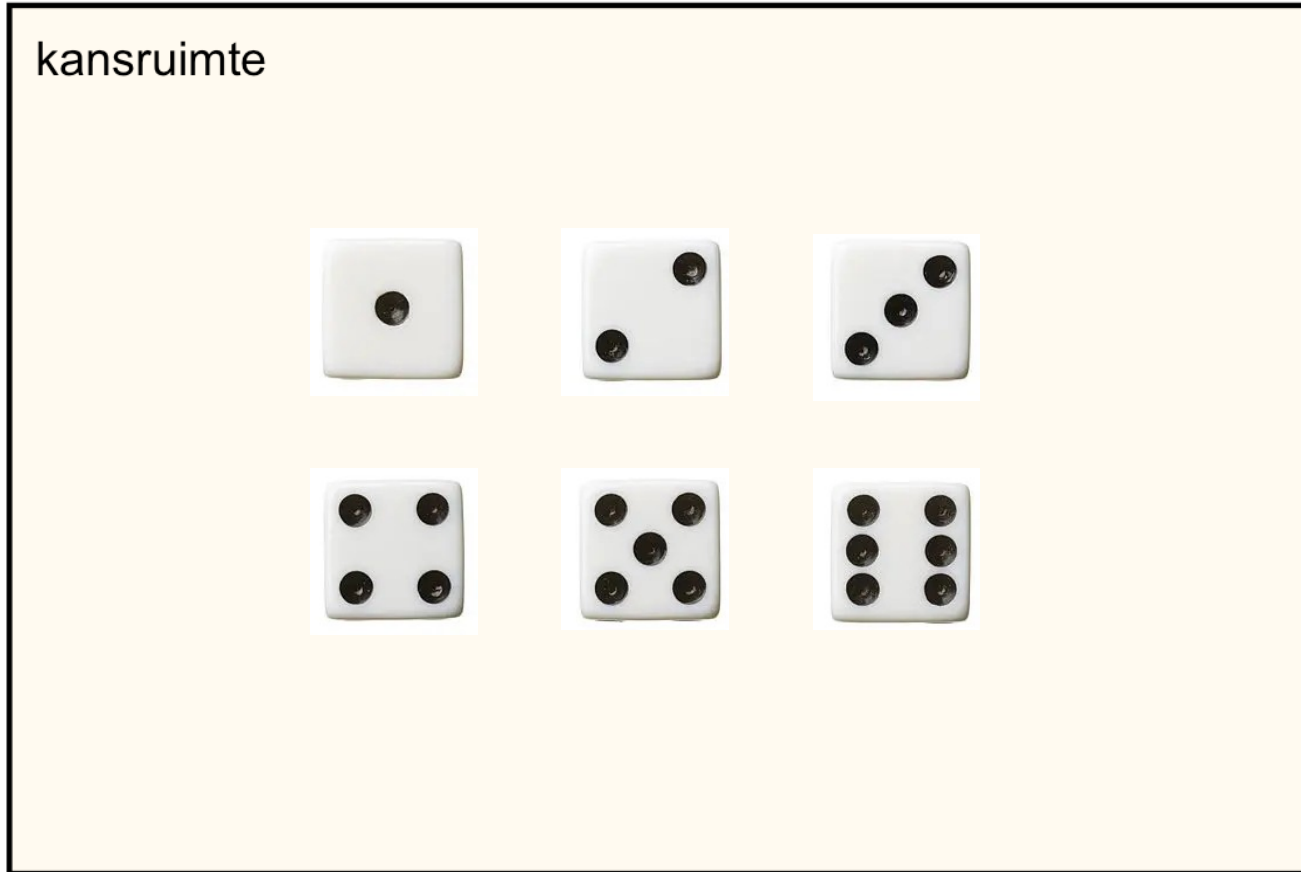
Deelverzameling van de kansruimte.

$X = \text{even}$

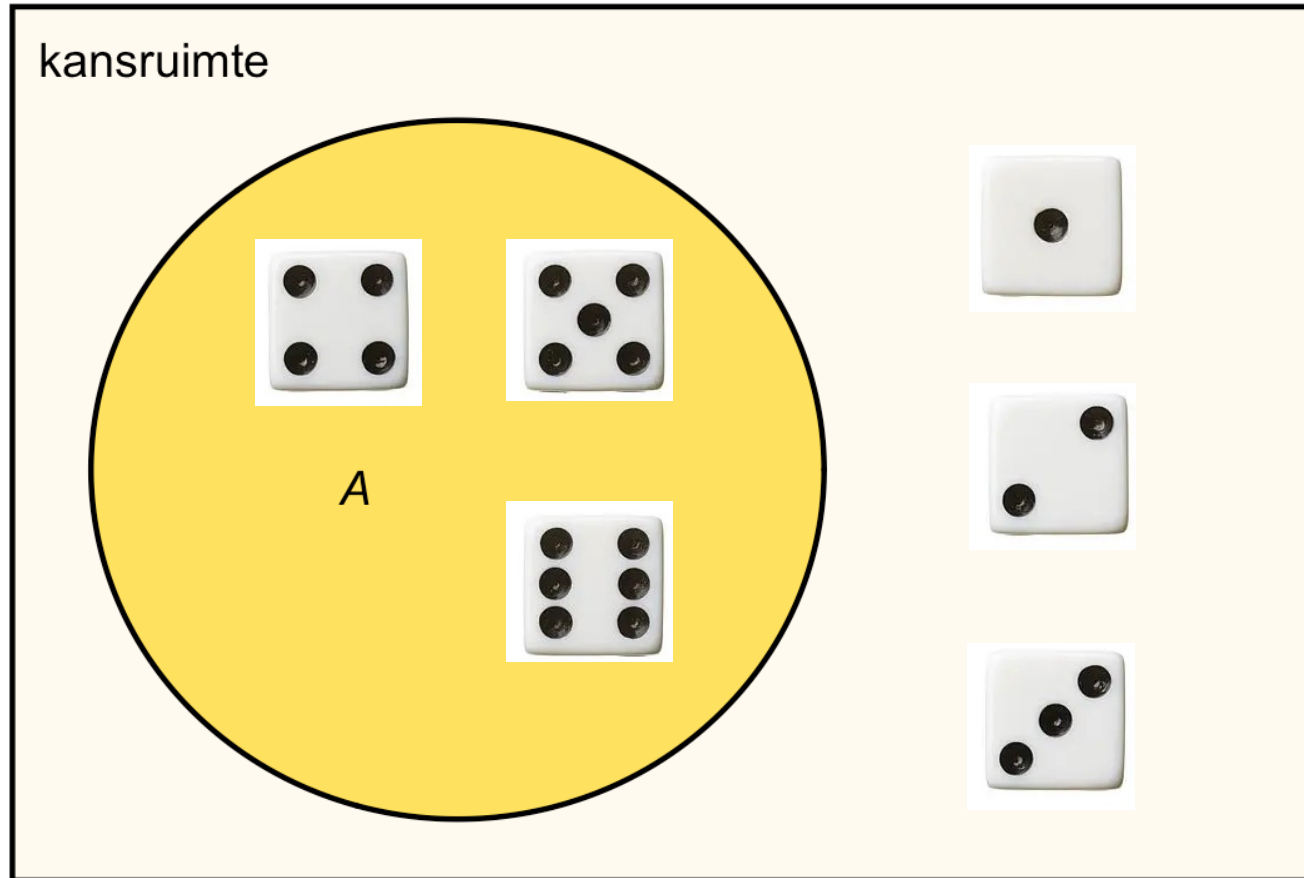
Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Venn-diagrammen: kansruimte



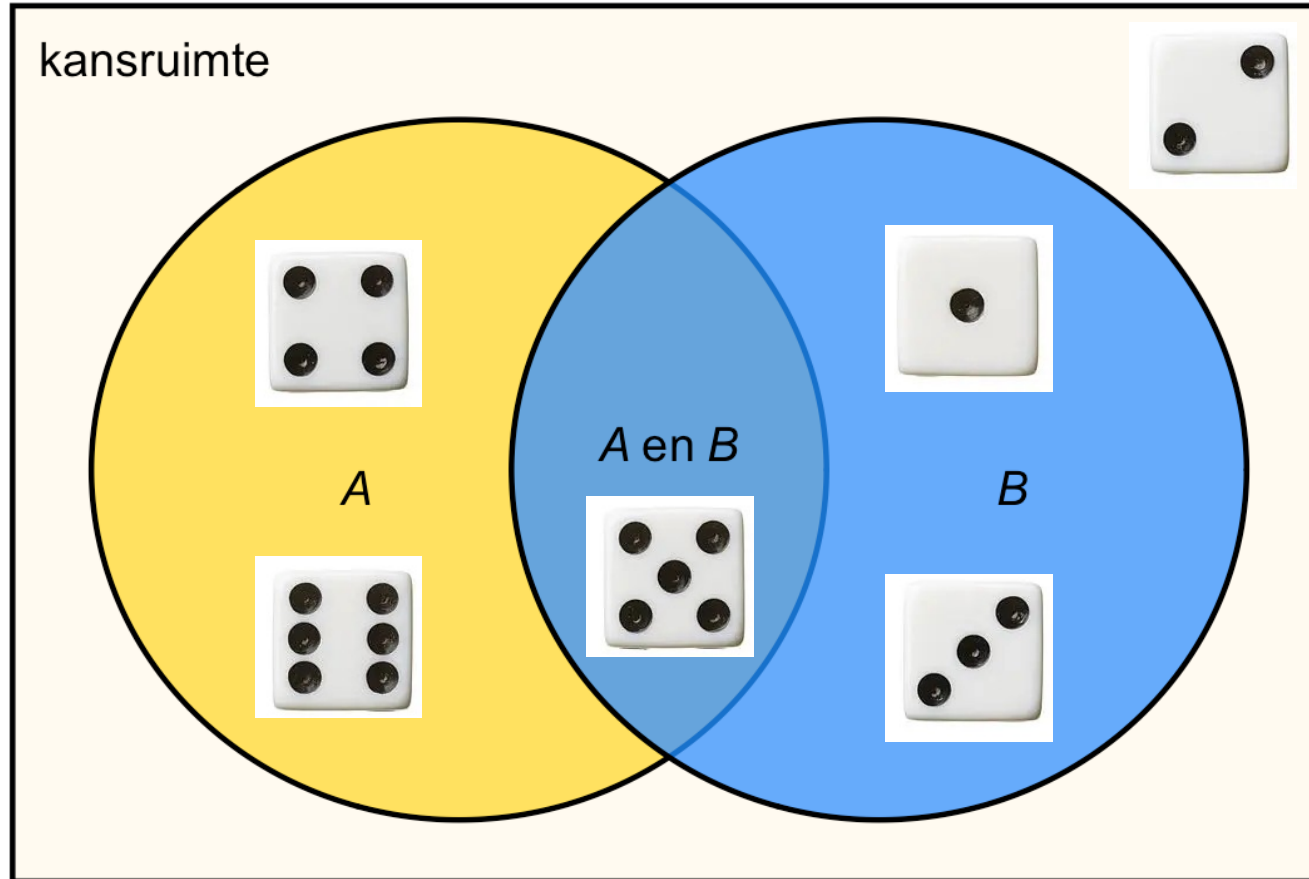
Venn-diagrammen: gebeurtenis A



Voorbeeld:

$$A: X > 3.$$

Venn-diagrammen: gebeurtenis A en B

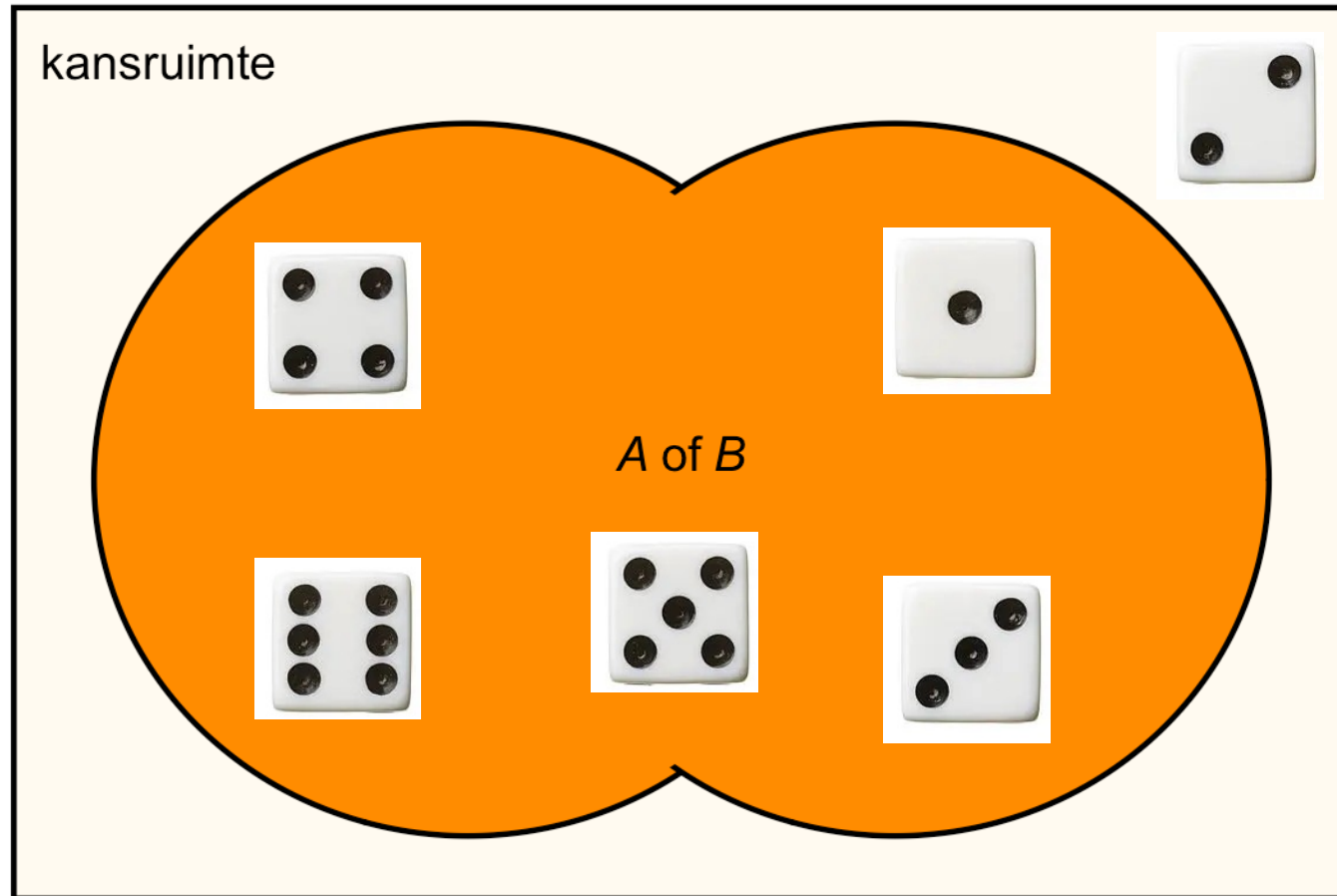


Voorbeeld:

A : $X > 3$.

B : X is oneven.

Venn-diagrammen: gebeurtenis A of B



Voorbeeld:

$A: X > 3.$

$B: X$ is oneven.

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Kansen als relatieve frequenties in een lange serie kansexperimenten



Frequentistisch kansbegrip:

- Herhaal het kansexperiment héél (oneindig) vaak.
- De kans $\Pr[A]$ is de relatieve frequentie van A in die (oneindige) serie.

Voorbeeld:

- Gooi een eerlijke dobbelsteen héél vaak.
- De relatieve frequentie van de uitkomst 6 convergeert naar $\frac{1}{6}$.
- Daarom: $\Pr[X = 6] = 1/6$.

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Kansberekeningen vereisen altijd een kansmodel

Is de kans op een 3 gelijk aan $\frac{1}{6}$?



Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

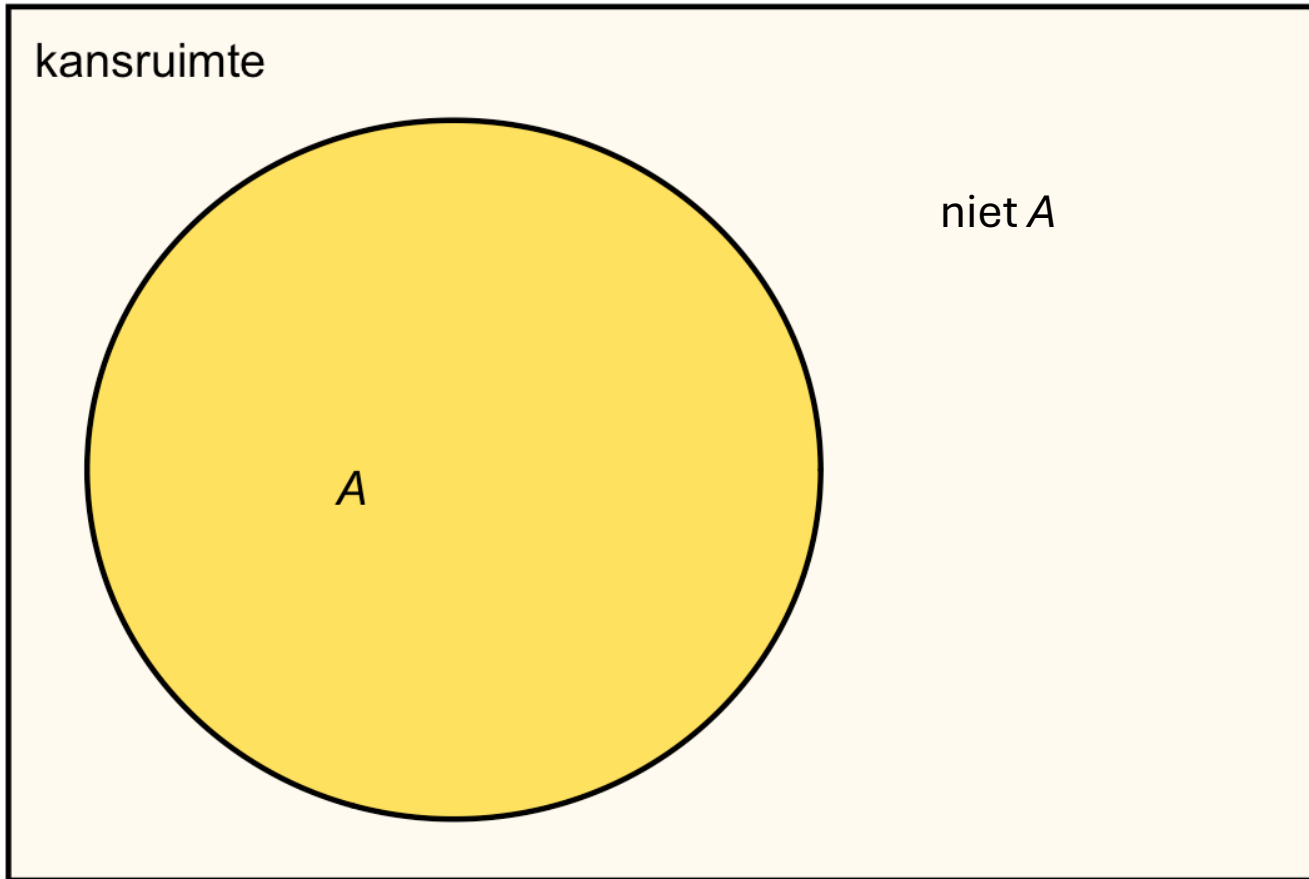
Optelregel voor discrete of categorische kansvariabelen

Relatieve frequenties tellen op tot 1:

$$\sum_x \Pr[X = x] = 1$$

(Bij continue kansen wordt de sommatie een integraal...)

Complementregel



$$\Pr[A] + \Pr[\text{niet } A] = 1$$

Dus ook (**complementregel**):

$$\Pr[\text{niet } A] = 1 - \Pr[A],$$

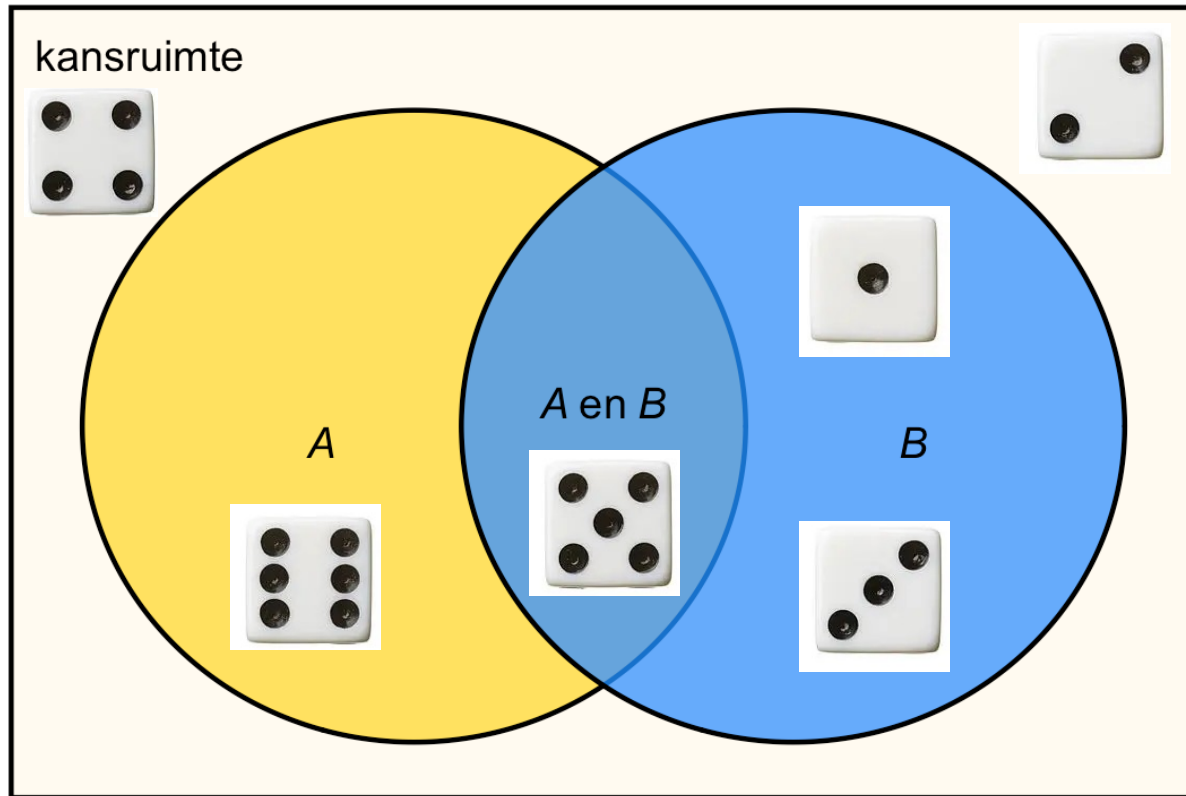
en:

$$\Pr[A] = 1 - \Pr[\text{niet } A].$$

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

Conditionele kansen



Kans op A gegeven B :

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \text{ en } B]}{\Pr[B]}$$

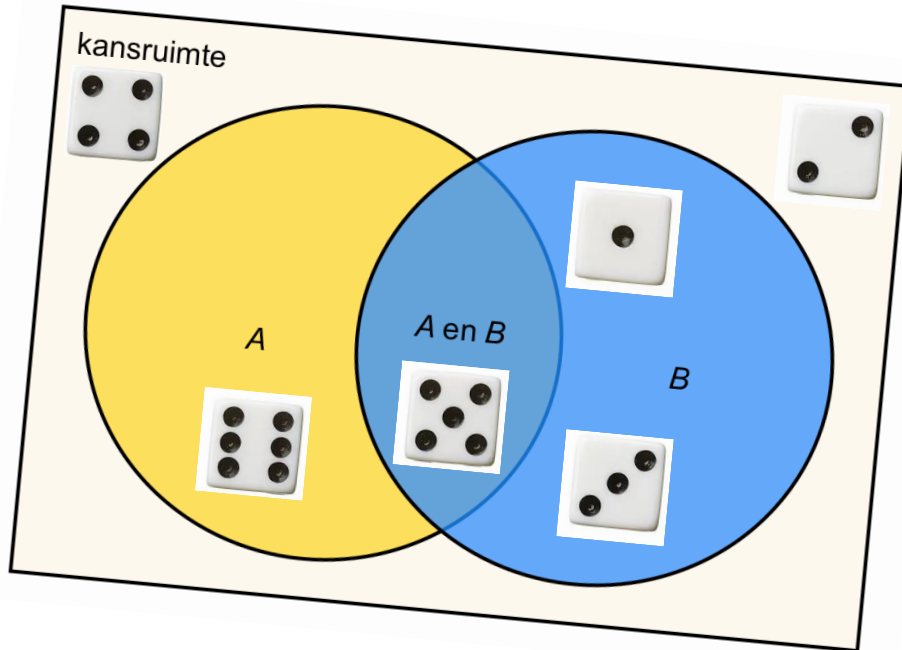
Voorbeeld:

A : $X > 4$.

B : X is oneven.

$$\Pr[A|B] = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Conditionele kans



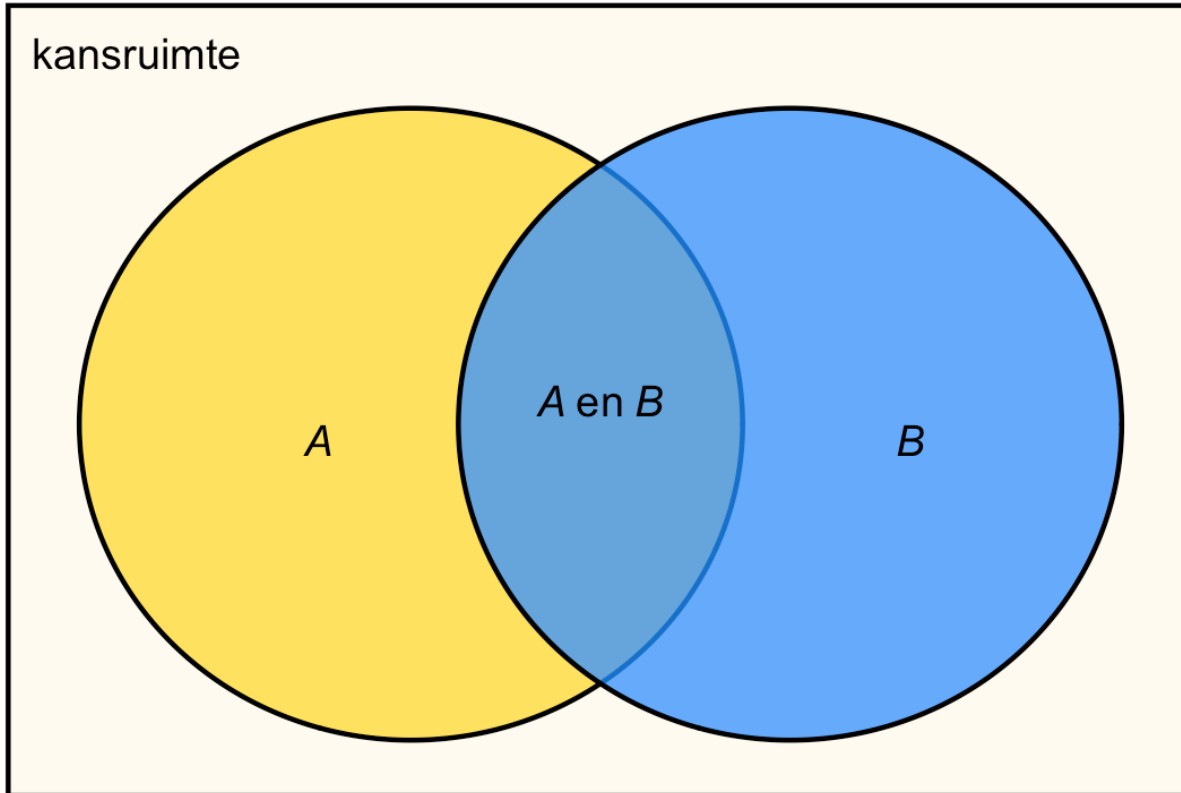
Neem weer de volgende gebeurtenissen:

A: $X > 4$,

B: X is oneven.

Wat is $\Pr[B|A]$?

Conditionele kansen niet zomaar omdraaien!



- $\Pr[B|A] = \frac{\Pr[A \text{ en } B]}{\Pr[A]},$
- $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \text{ en } B]}{\Pr[B]},$

$$\Pr[B|A] \neq \Pr[A|B].$$

Conditionele kansen niet zomaar omdraaien! (2)

Duidelijke voorbeelden:

$$\begin{aligned}\Pr[\text{zwanger} \mid \text{vrouw}] &\neq \Pr[\text{vrouw} \mid \text{zwanger}] \\ \Pr[\text{lid Tweede kamer} \mid \text{Nederlander}] &\neq \Pr[\text{Nederlander} \mid \text{lid Tweede kamer}]\end{aligned}$$

Toch vaak verwarring:

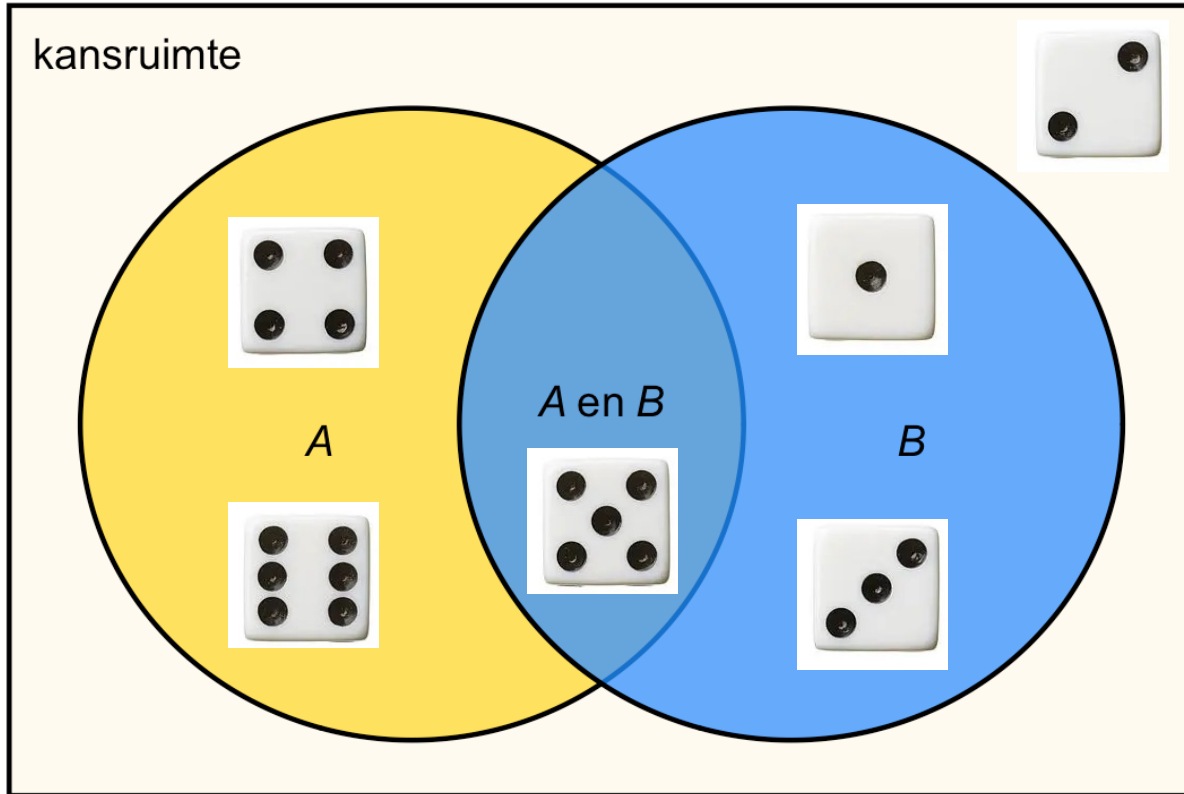
$$\Pr[\text{positieve test} \mid \text{COVID}] \neq \Pr[\text{COVID} \mid \text{positieve test}]$$

Staks de oplossing: de **regel van Bayes**.

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

De kans op A en B - algemeen



Kans op A en B :

$$\Pr[A \text{ en } B] = \Pr[A|B] \Pr[B] .$$

Voorbeeld:

A : $X > 3$.

B X is oneven.

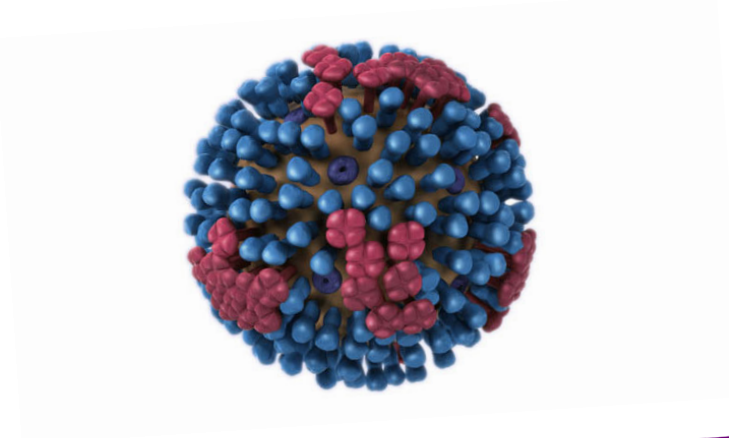
$$\Pr[A \text{ en } B] = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6} .$$

Kans op A en B – algemeen

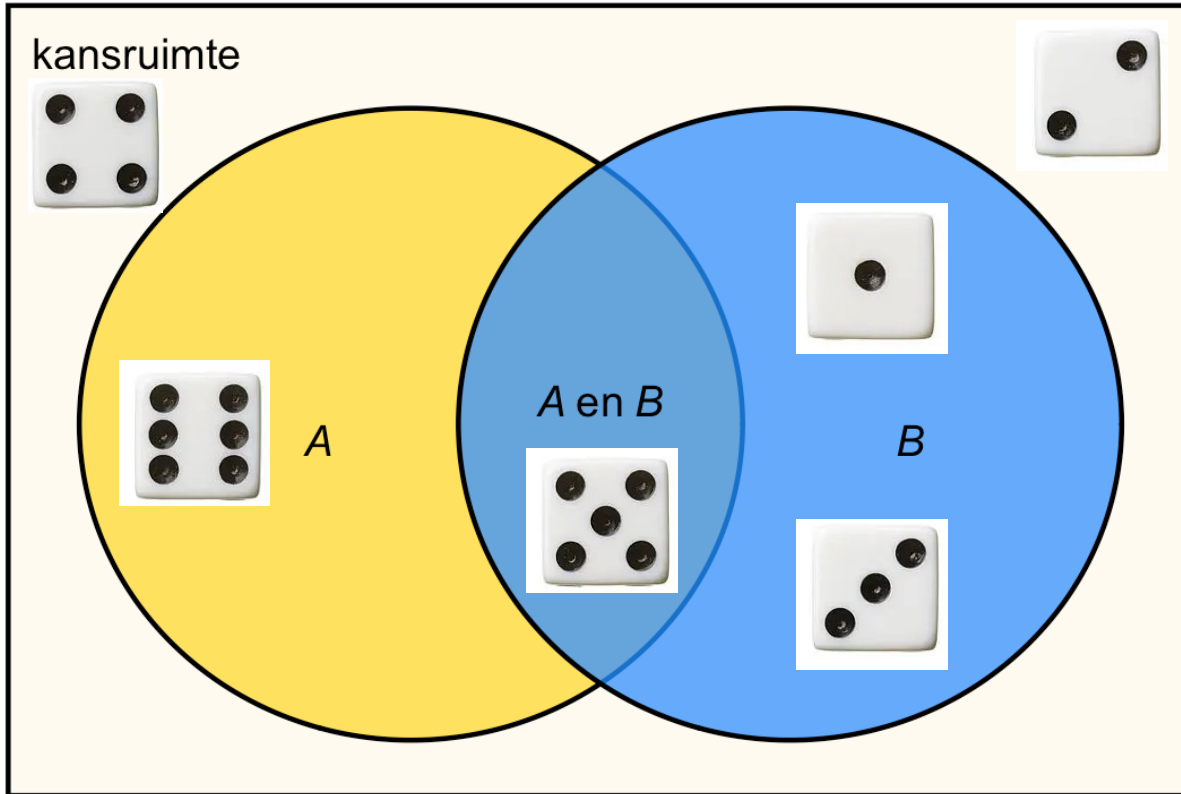


In een bepaald griepseizoen is 50% van de ouderen (65+) gevaccineerd tegen de griep. De kans dat een gevaccineerde oudere alsnog griep krijgt, is 0,05.

Wat is de kans dat een willekeurige oudere gevaccineerd is én toch griep krijgt?



Onafhankelijke gebeurtenissen



A en B zijn onafhankelijk als

$$\Pr[A|B] = \Pr[A].$$

Voorbeeld: Onafhankelijk?

A: $X > 4$.

B: X is oneven.

- $\Pr[A|B] = \frac{1}{3}$,
- $\Pr[A] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

A en B zijn dus onafhankelijk!

(On)afhankelijke gebeurtenissen (2)



Koop twee loten van de Staatsloterij.

Gebeurtenissen:

- A. Op het eerste lot valt de Jackpot.
- B. Op het tweede lot valt de Jackpot.

Zijn A en B onafhankelijk?

- ☐ Ja
- ☐ Nee



(On)afhankelijke gebeurtenissen



Gooi twee keer met dezelfde dobbelsteen.

Gebeurtenissen:

- A. Het eerste resultaat is een 6.
- B. Het tweede resultaat is een 6.

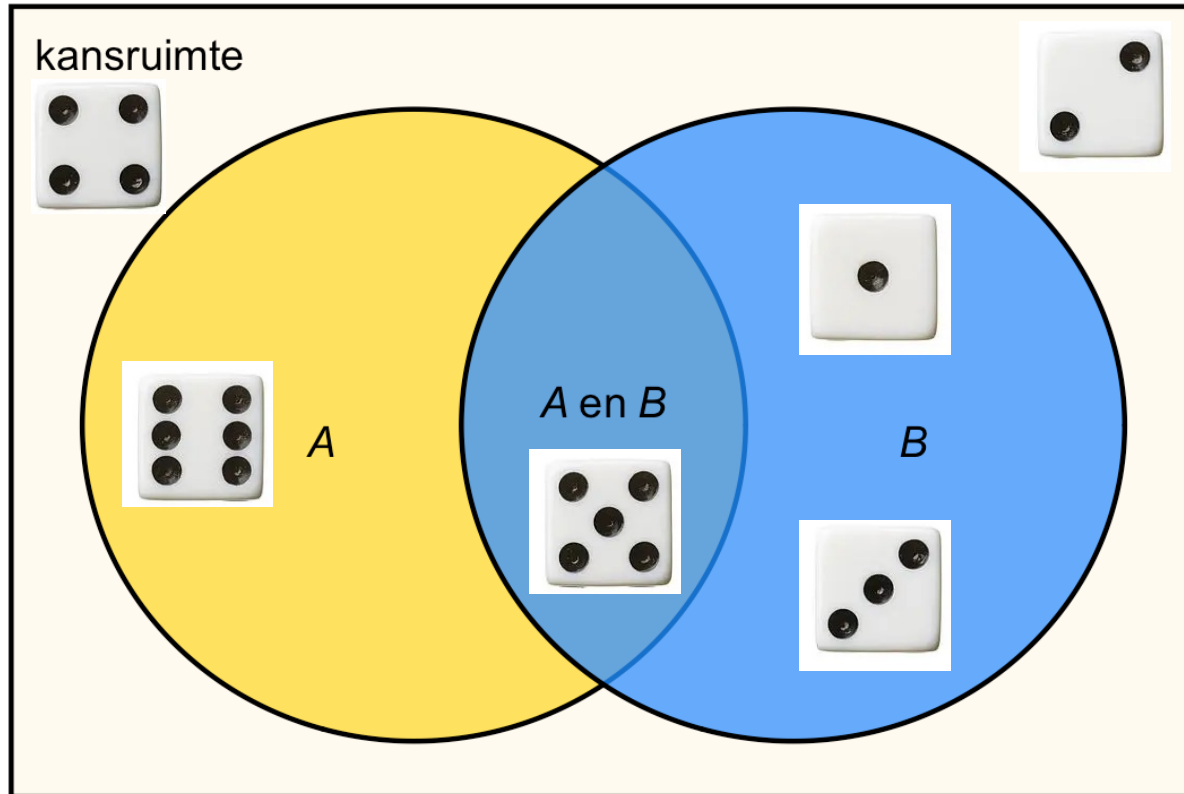


Zijn A en B onafhankelijk?

☐ Ja

☐ Nee

De vermenigvuldigingsregel: De kans op A en B voor onafhankelijke gebeurtenissen



Als A en B onafhankelijk zijn, geldt de vermenigvuldigingsregel:

$$\Pr[A \text{ en } B] = \Pr[A] \Pr[B]$$

Voorbeeld:

A : $X > 4$.

B : X is oneven.

$$\Pr[A \text{ en } B] = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

De kans op A en B



Trek willekeurig twee personen uit de populatie van Nederlandse stemgerechtigden.

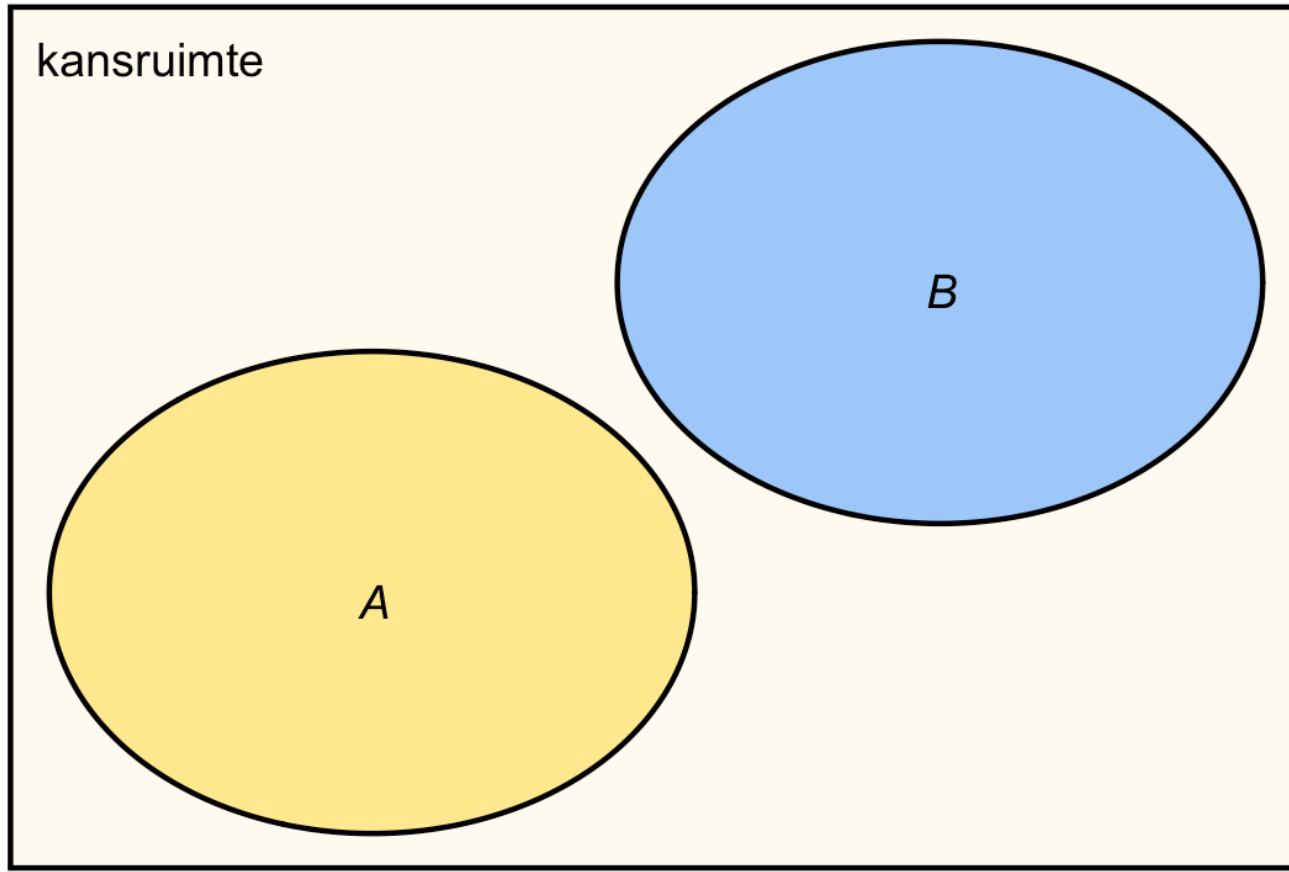
Neem aan dat 6% van de populatie van plan is om D99 te stemmen .

Wat is de kans dat *beide* personen van plan zijn D66 te gaan stemmen?

Inhoud

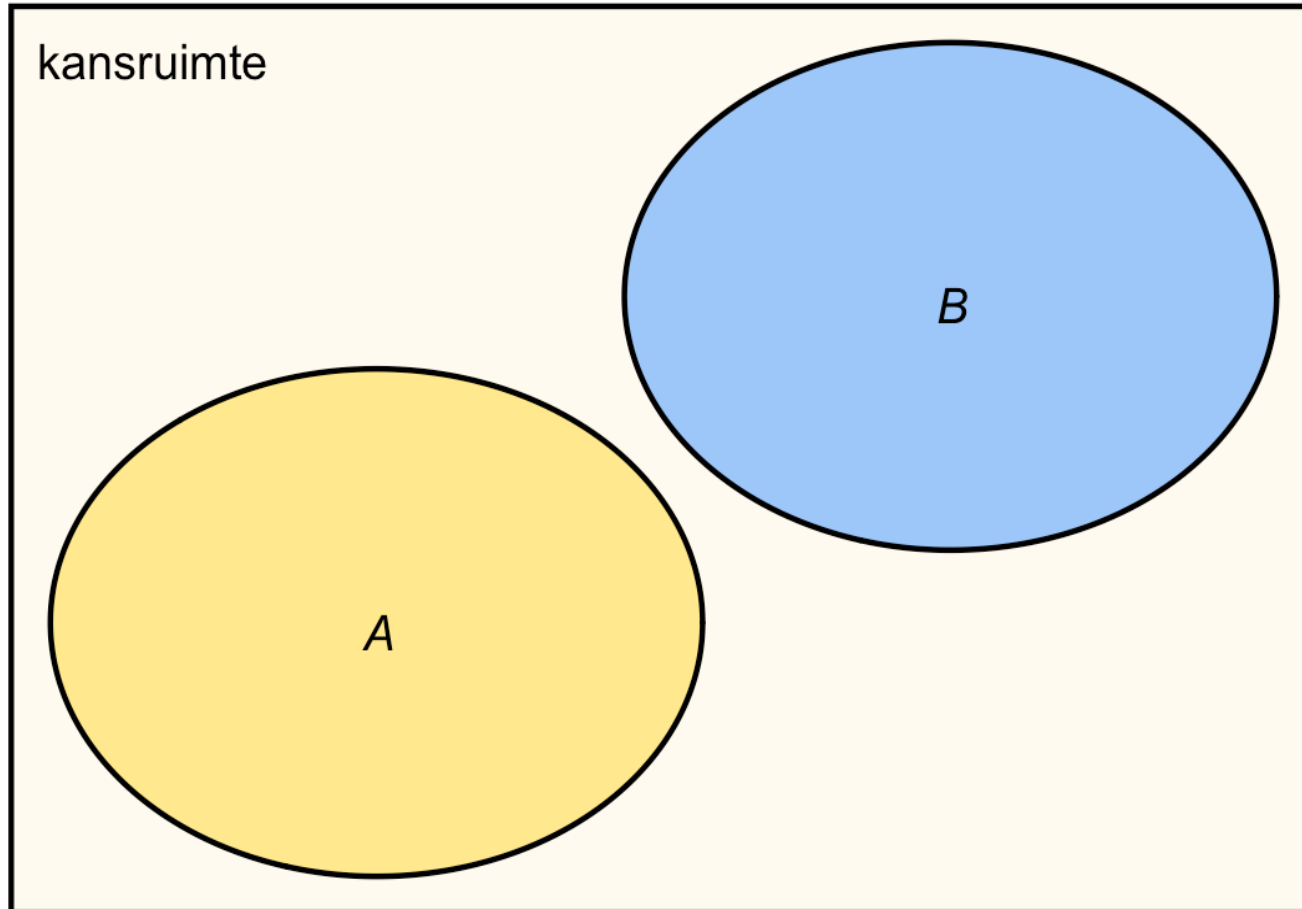
1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

De kans op A of B voor gebeurtenissen die elkaar uitsluiten



Gebeurtenissen A en B **sluiten elkaar uit** als er geen uitkomst is waarbij *beide* plaatsvinden.

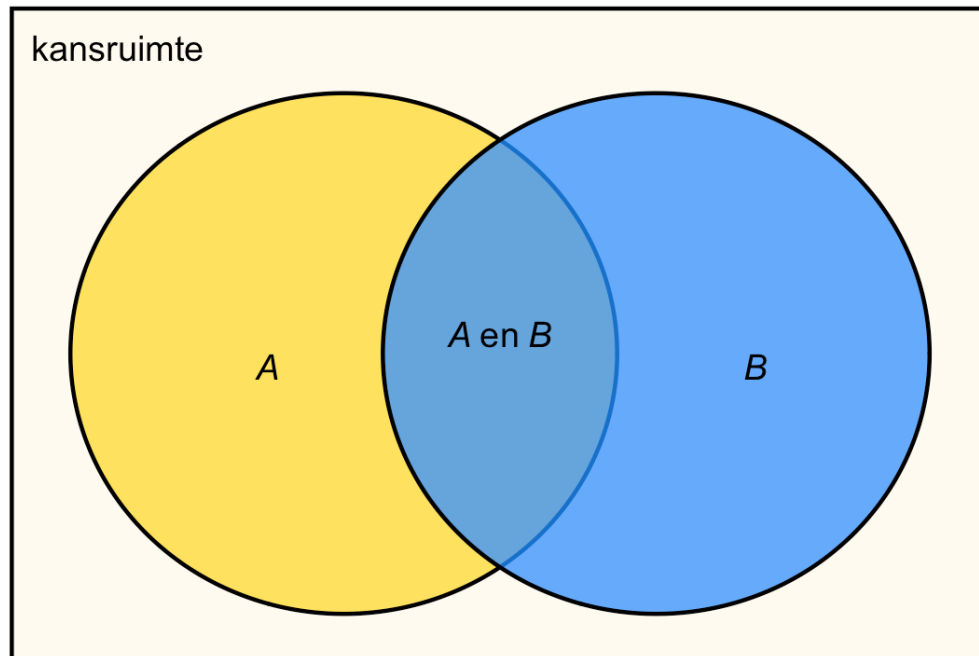
Optelregel voor gebeurtenissen die elkaar uitsluiten



Als A en B elkaar uitsluiten
geldt de optelregel:

$$\Pr[A \text{ of } B] = \Pr[A] + \Pr[B].$$

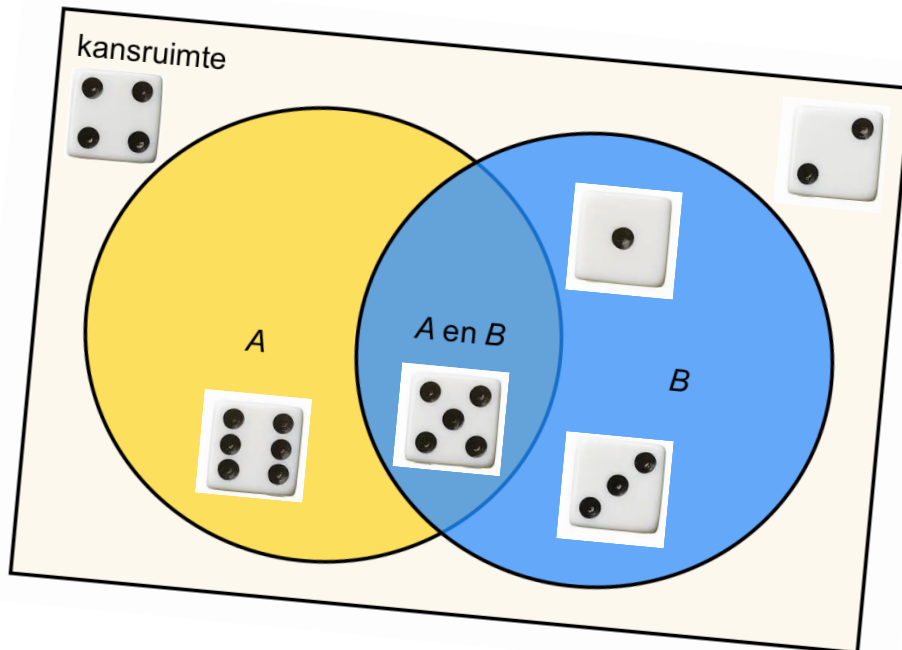
Optelregel voor gebeurtenissen die elkaar **niet** uitsluiten



Als A en B elkaar **niet** uitsluiten
geldt de algemene regel:

$$\Pr[A \text{ of } B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \text{ en } B].$$

De kans van A of B



Neem weer de volgende gebeurtenissen:

A: $X > 4$,

B: X is oneven.

Wat is $\Pr[A \text{ of } B]$?

Inhoud

1. Begrippen
2. Venn-diagrammen, gebeurtenissen A en B en A of B
3. Het frequentistische kansbegrip
4. Kansmodellen
5. Optelregel en complementregel
6. Conditionele kansen
7. Rekenregels voor de kans op A en B
8. Rekenregels voor de kans op A of B
9. De regel van Bayes

De regel van Bayes

We hebben geleerd:

$$\Pr[A \text{ en } B] = \Pr[A|B] \Pr[B],$$

en

$$\Pr[A \text{ en } B] = \Pr[B|A] \Pr[A].$$

Dus:

$$\Pr[B|A] \Pr[A] = \Pr[A|B] \Pr[B].$$

Daaruit volgt:

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[A|B] \Pr[B]}{\Pr[A]}.$$

