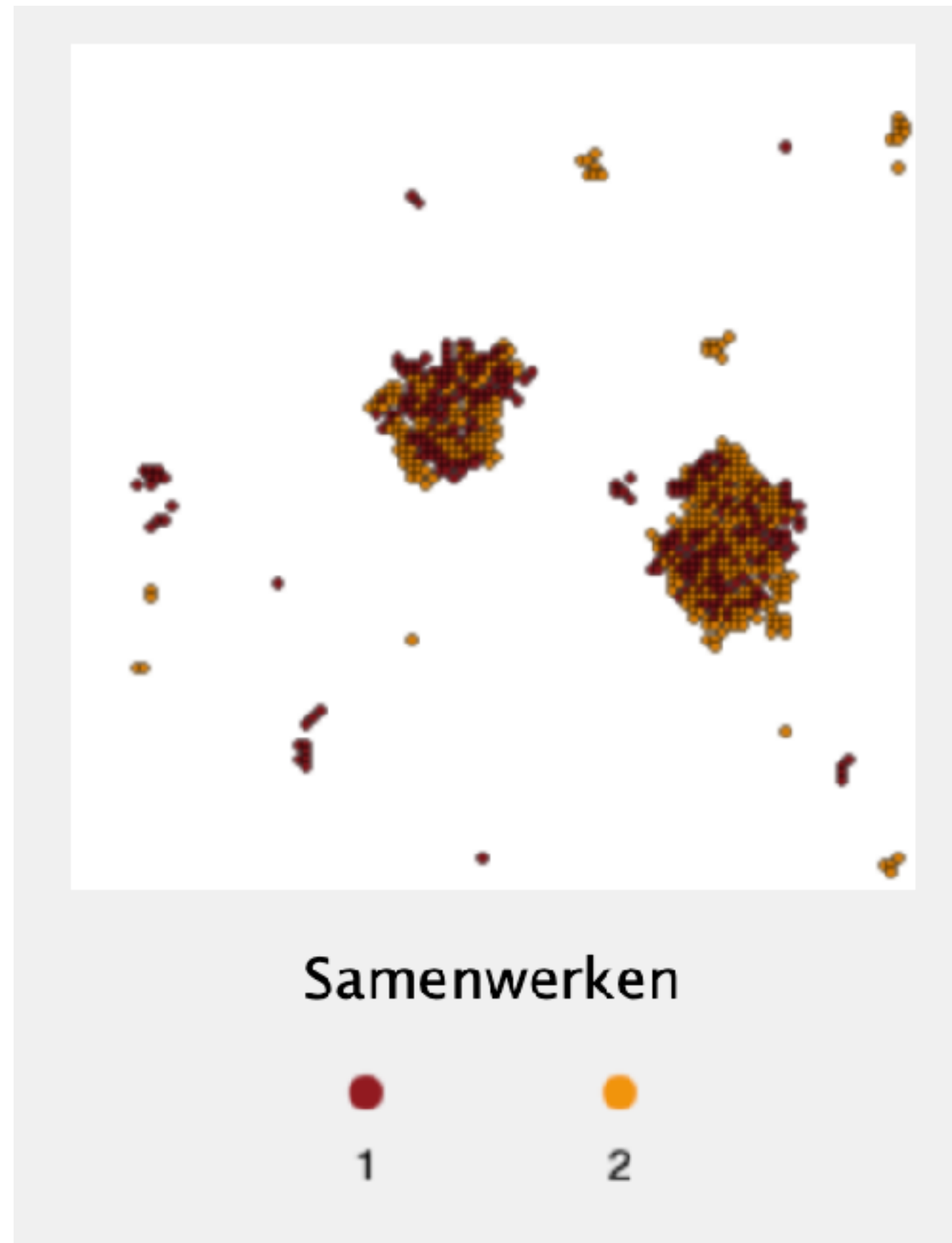
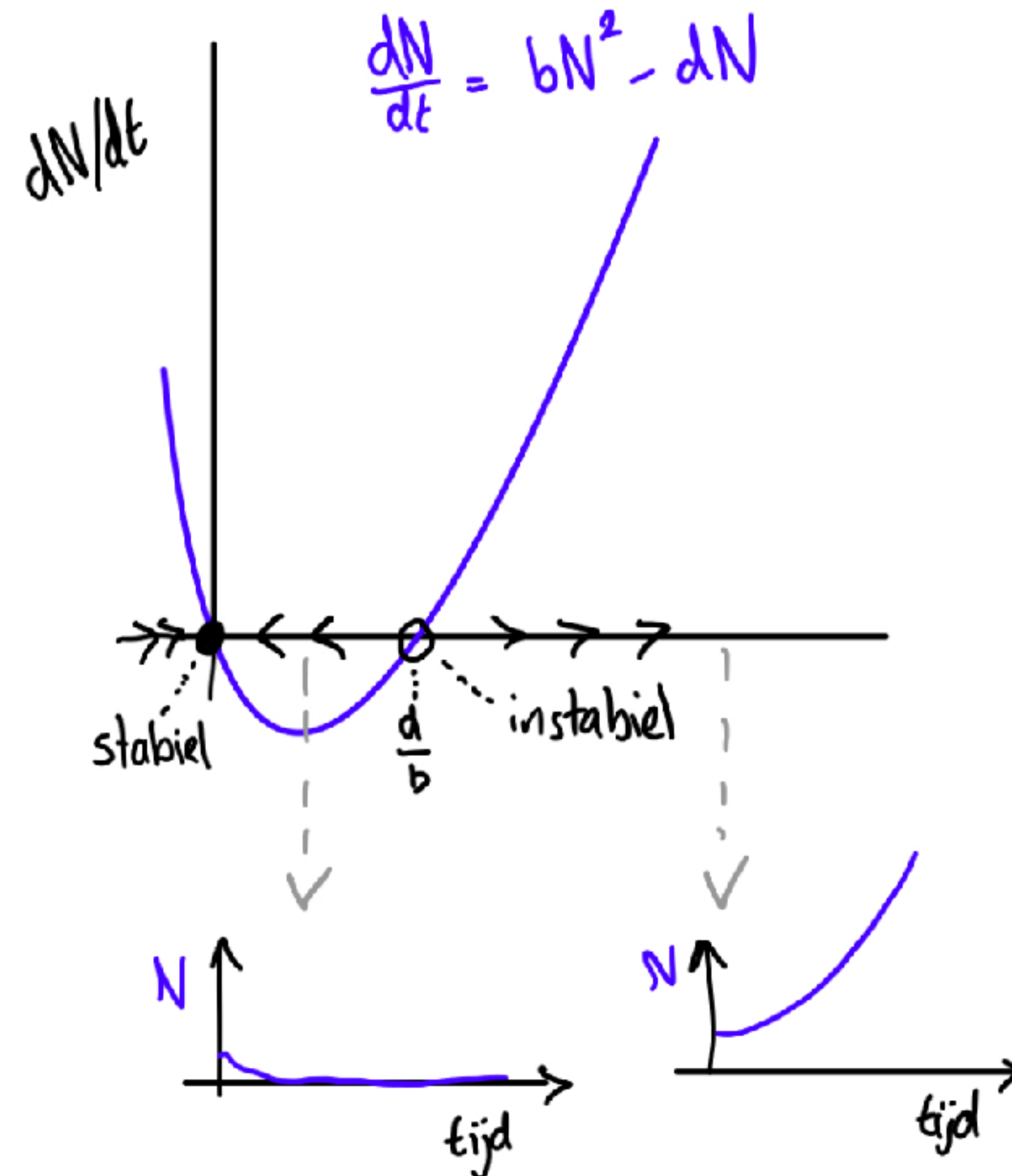
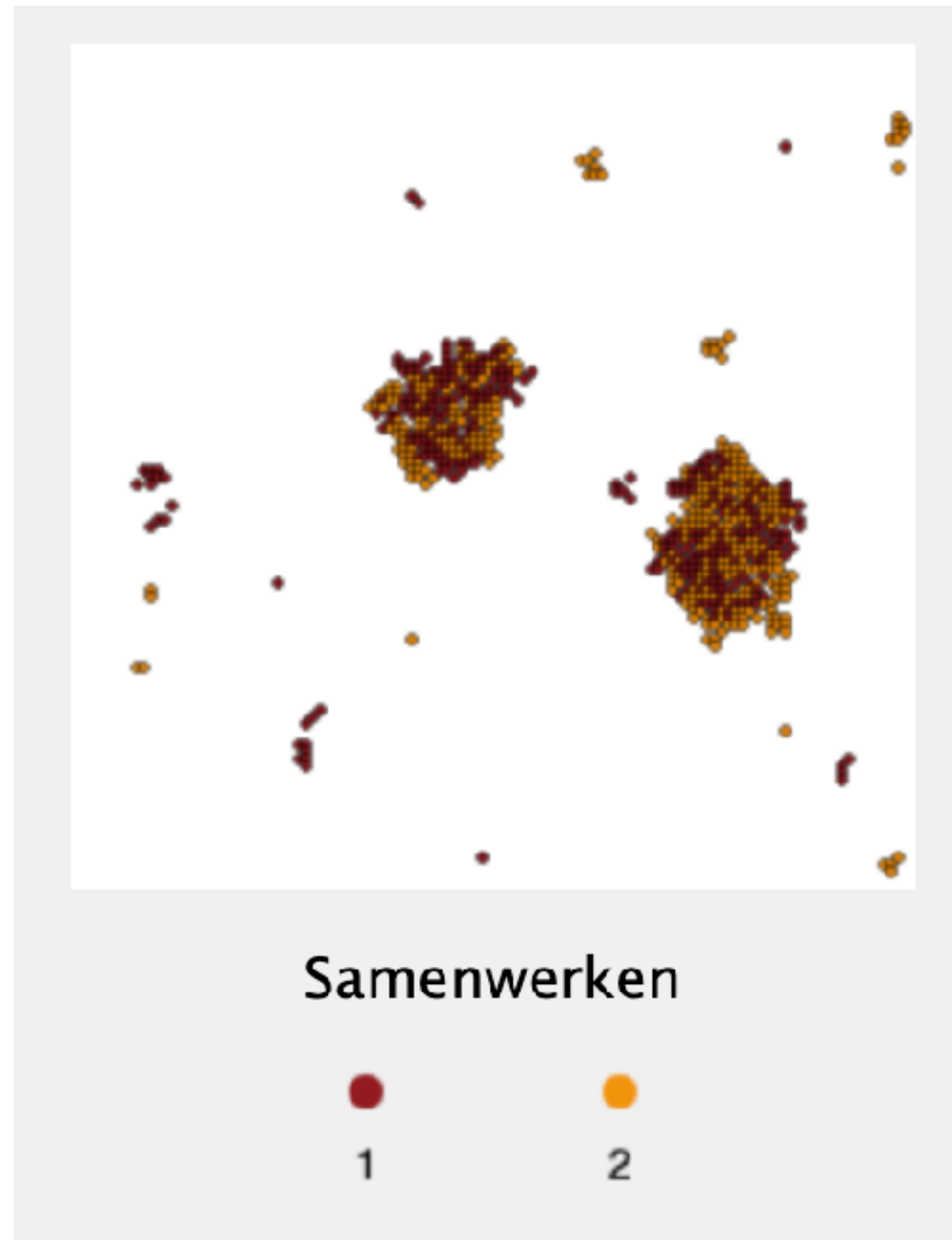


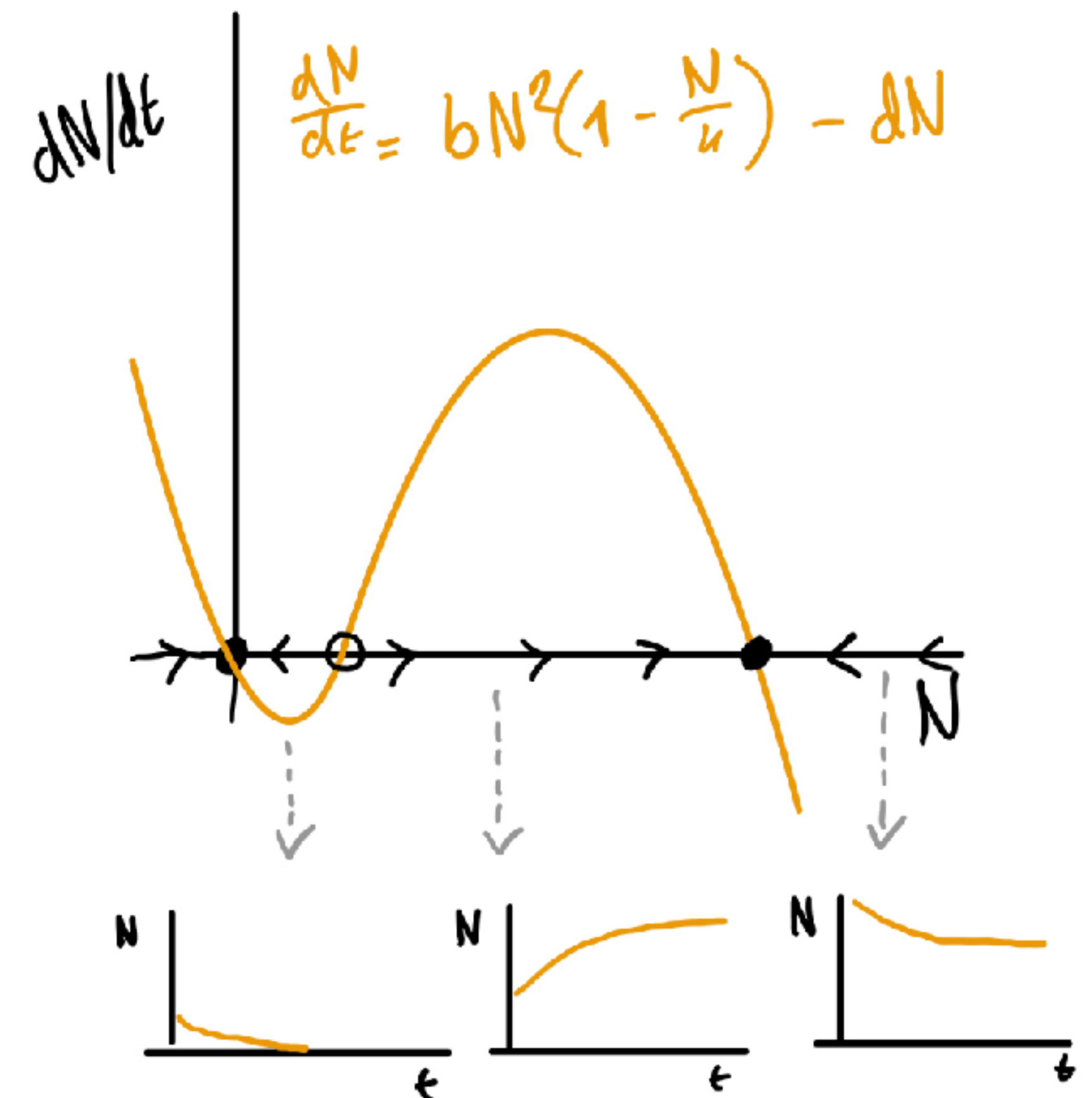
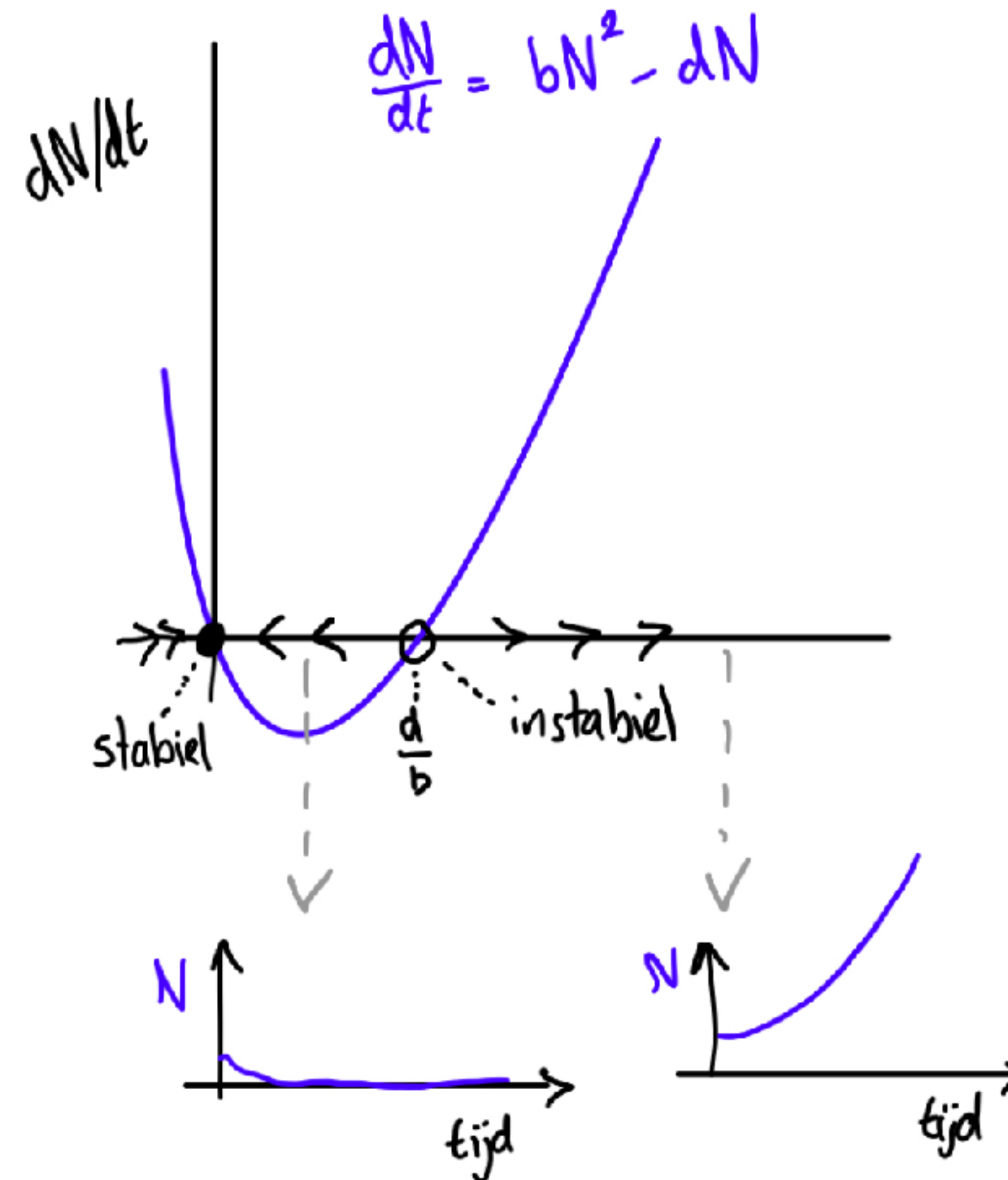
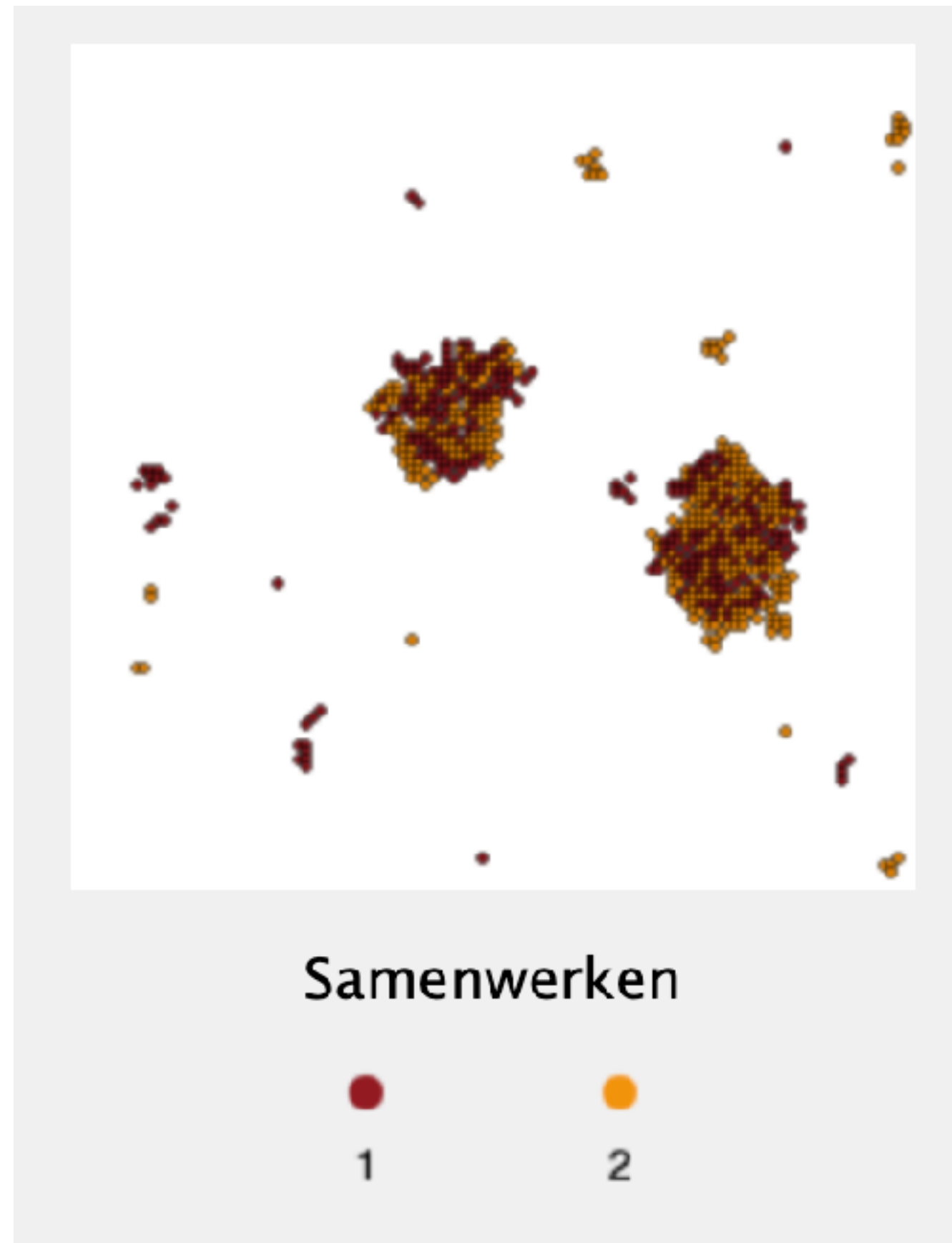
Werkcollege Hfst 13 (ruimtelijke groei)



Werkcollege Hfst 13 (ruimtelijke groei)

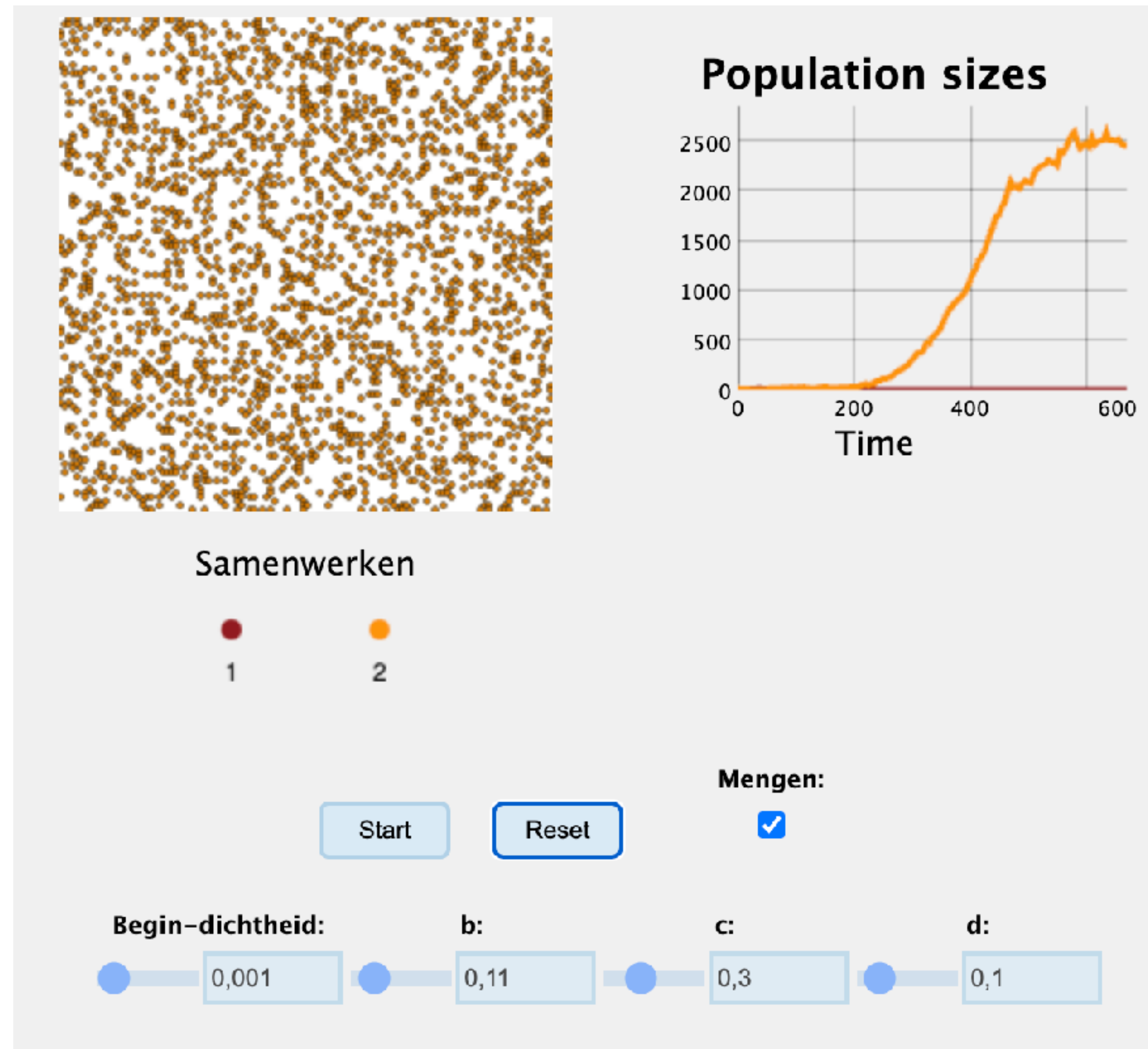


Werkcollege Hfst 13 (ruimtelijke groei)

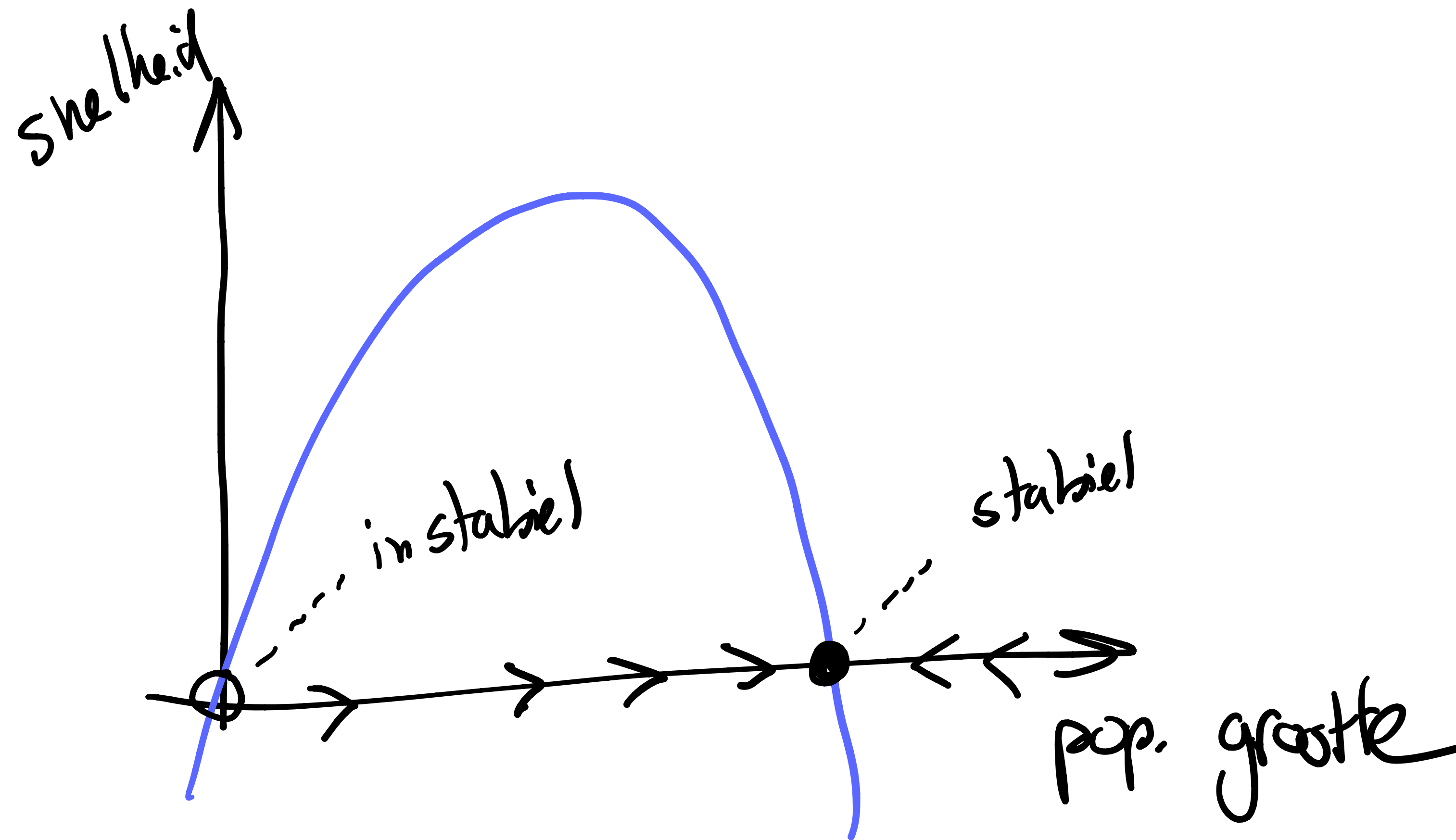


Werkcollege Hfst 13 (ruimtelijke groei)

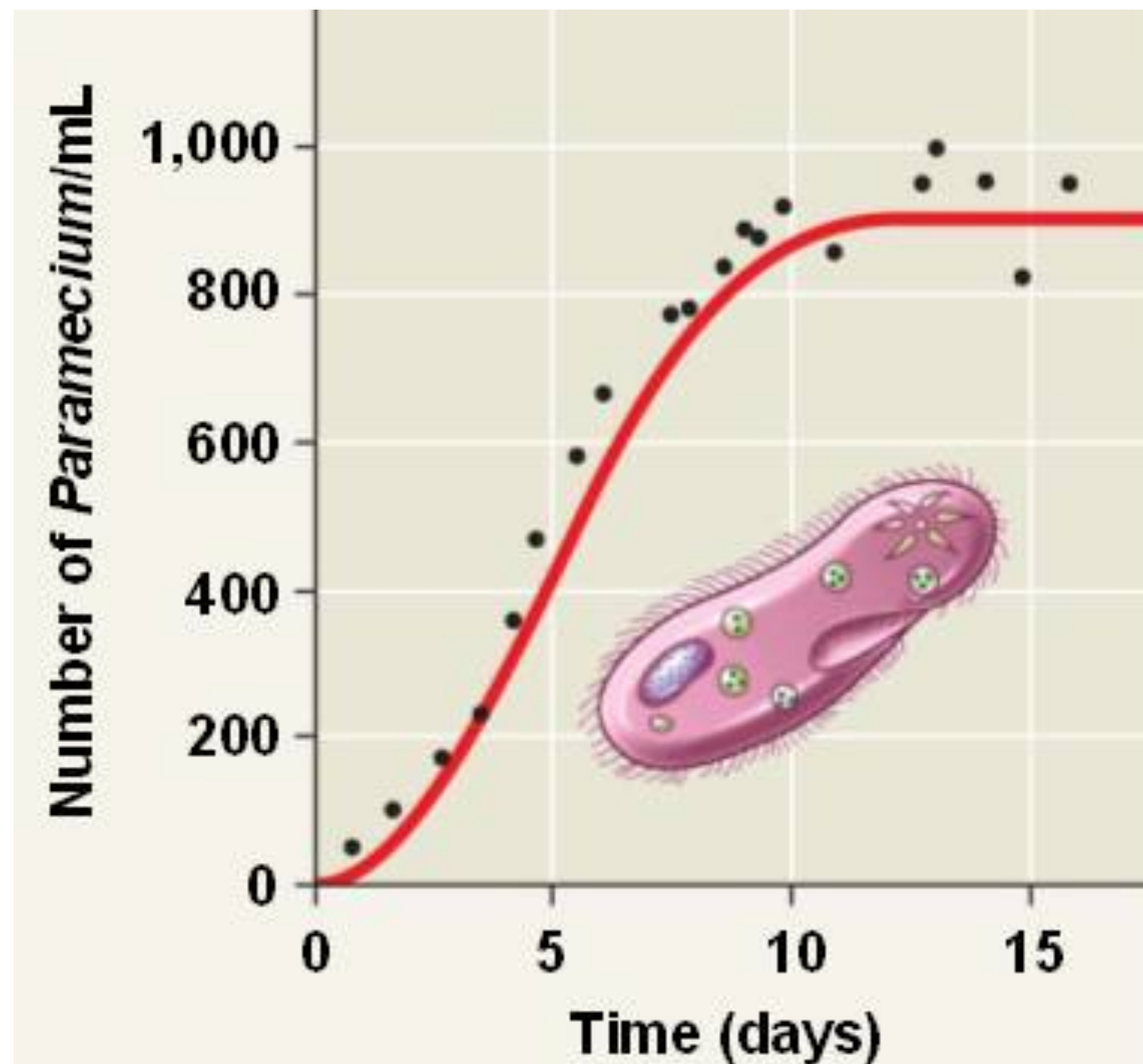
Werkcollege Hfst 13 (ruimtelijke groei)



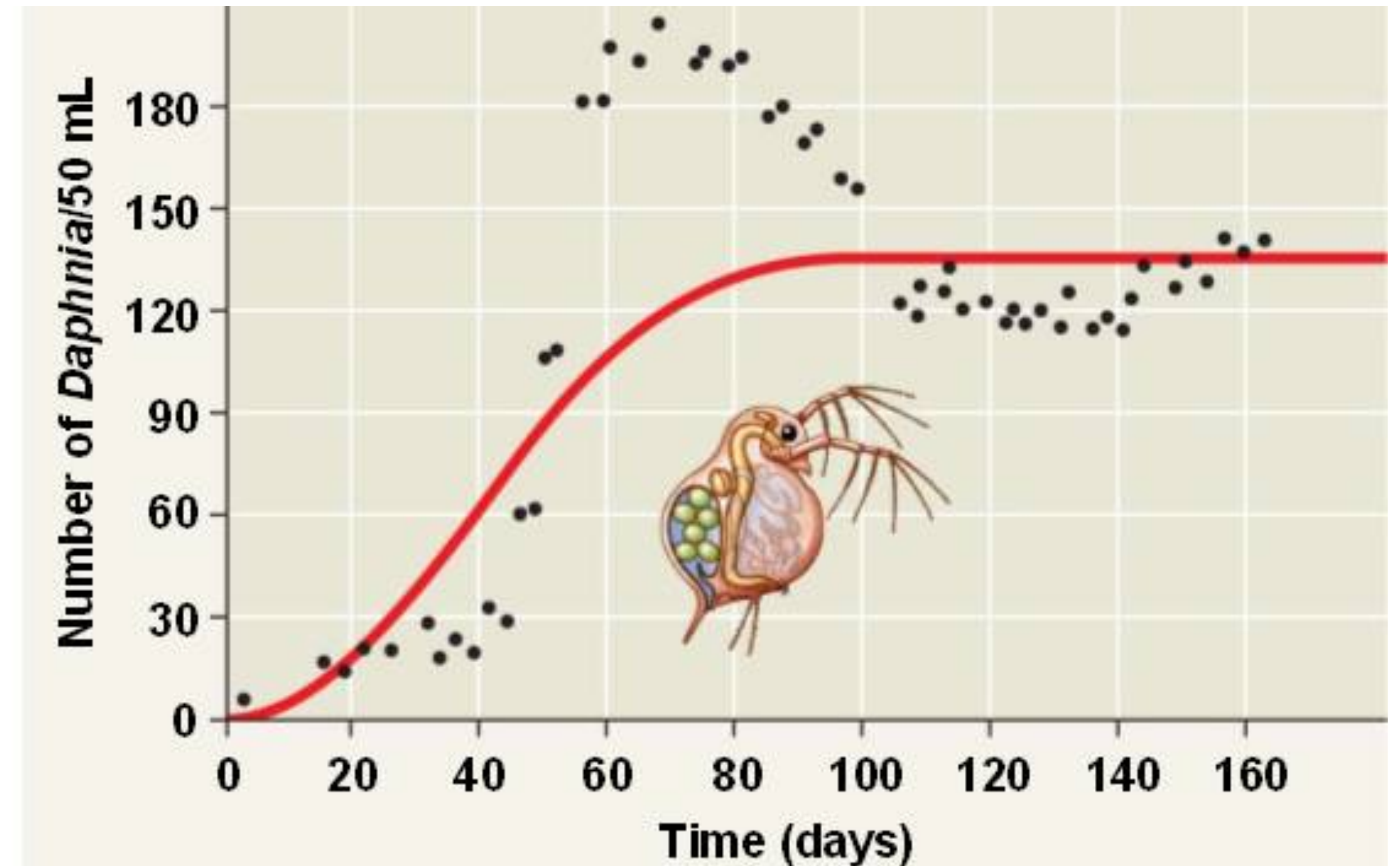
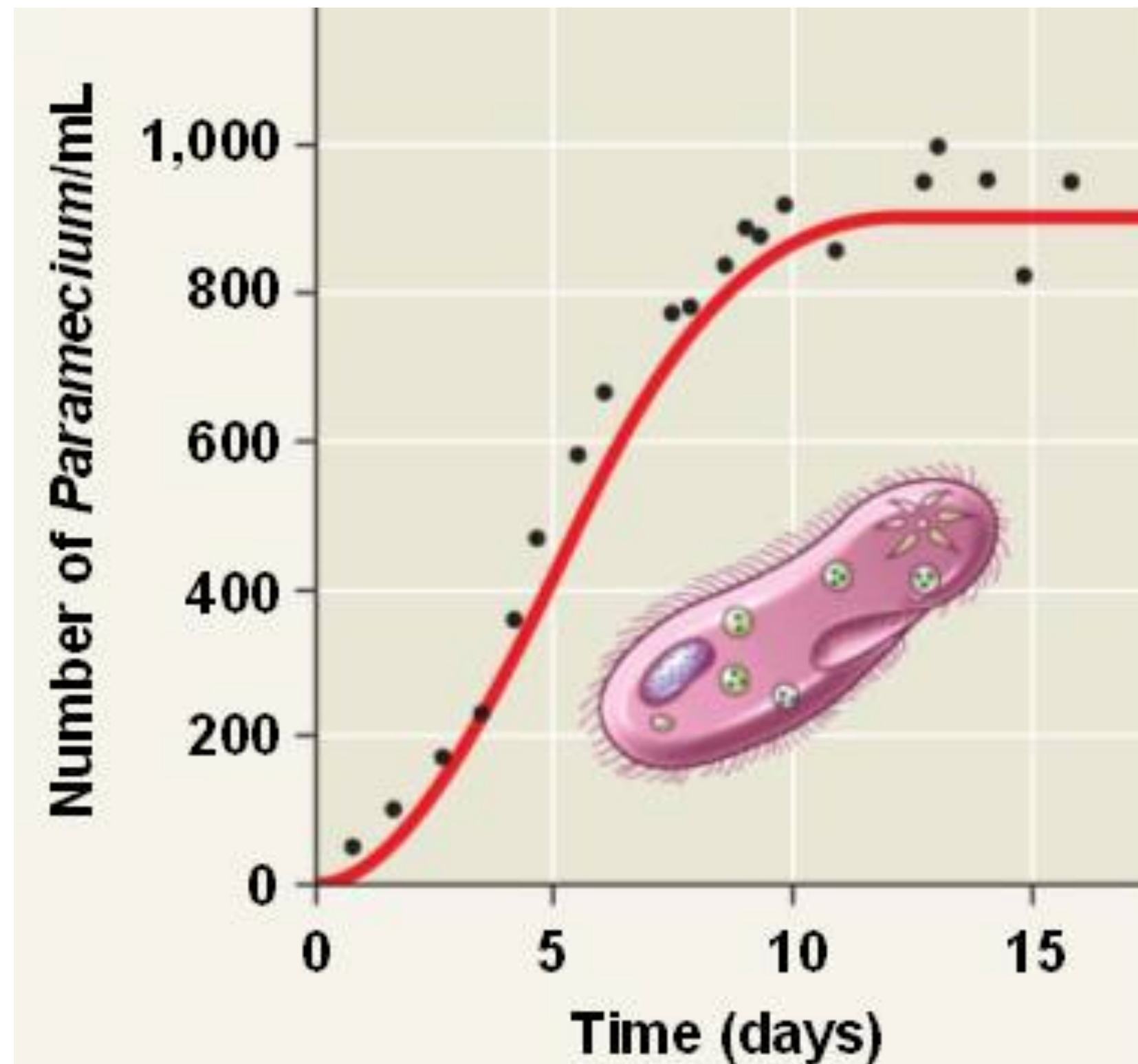
We weten door het faseportret: doorschieten kan niet!



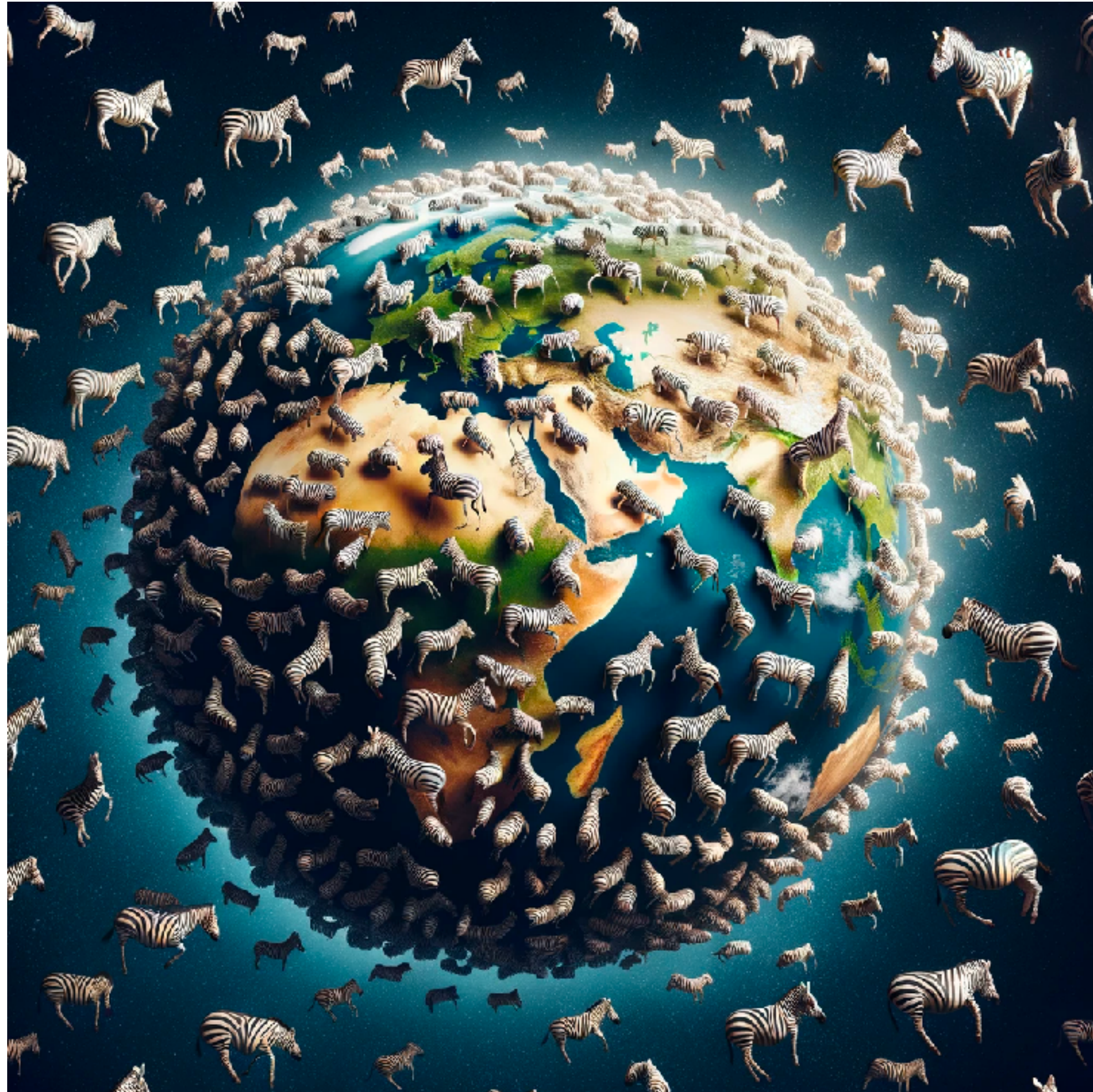
What about Daphnia?



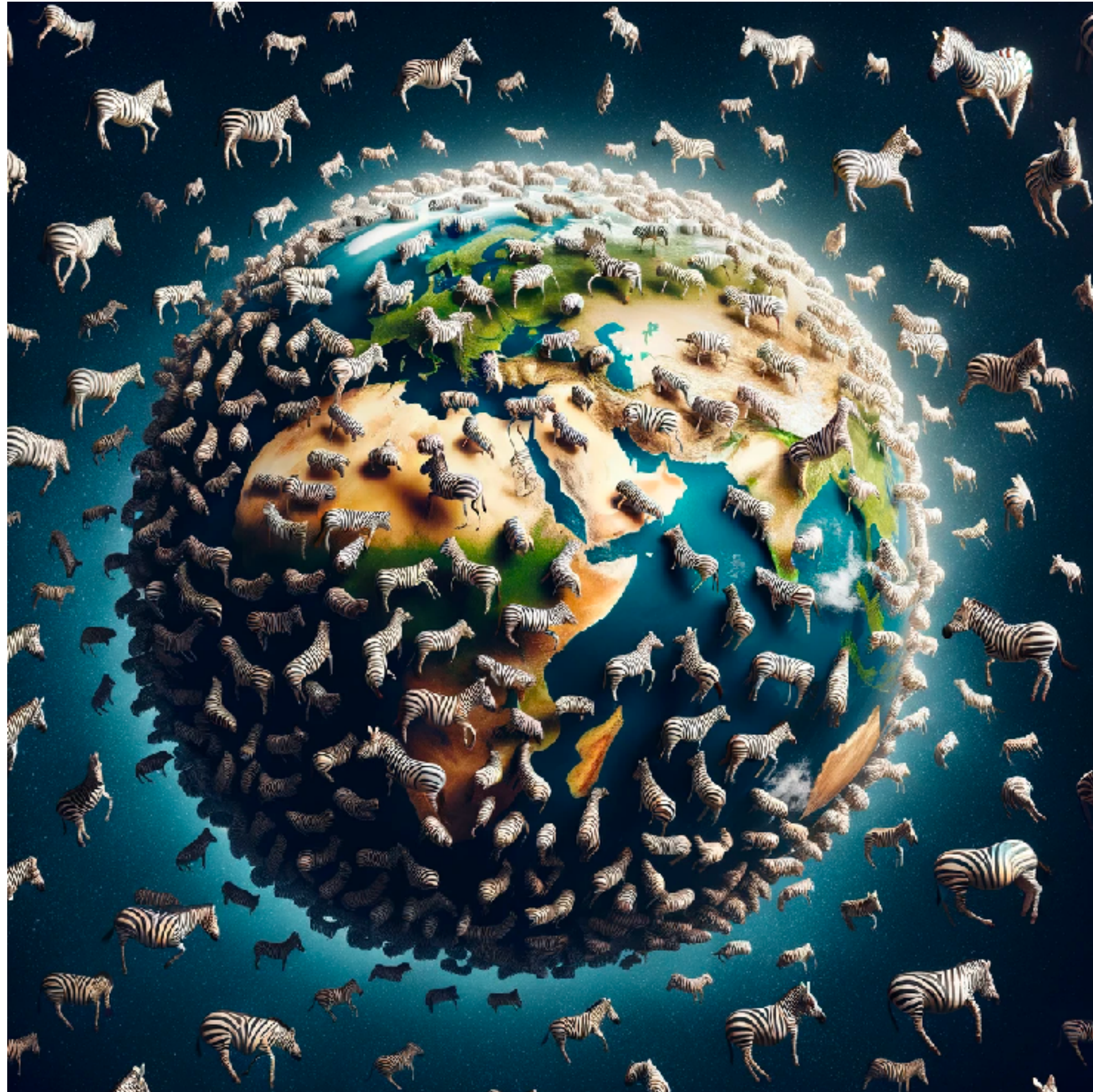
What about Daphnia?



Biologische populaties leven niet alleen



Biologische populaties leven niet alleen

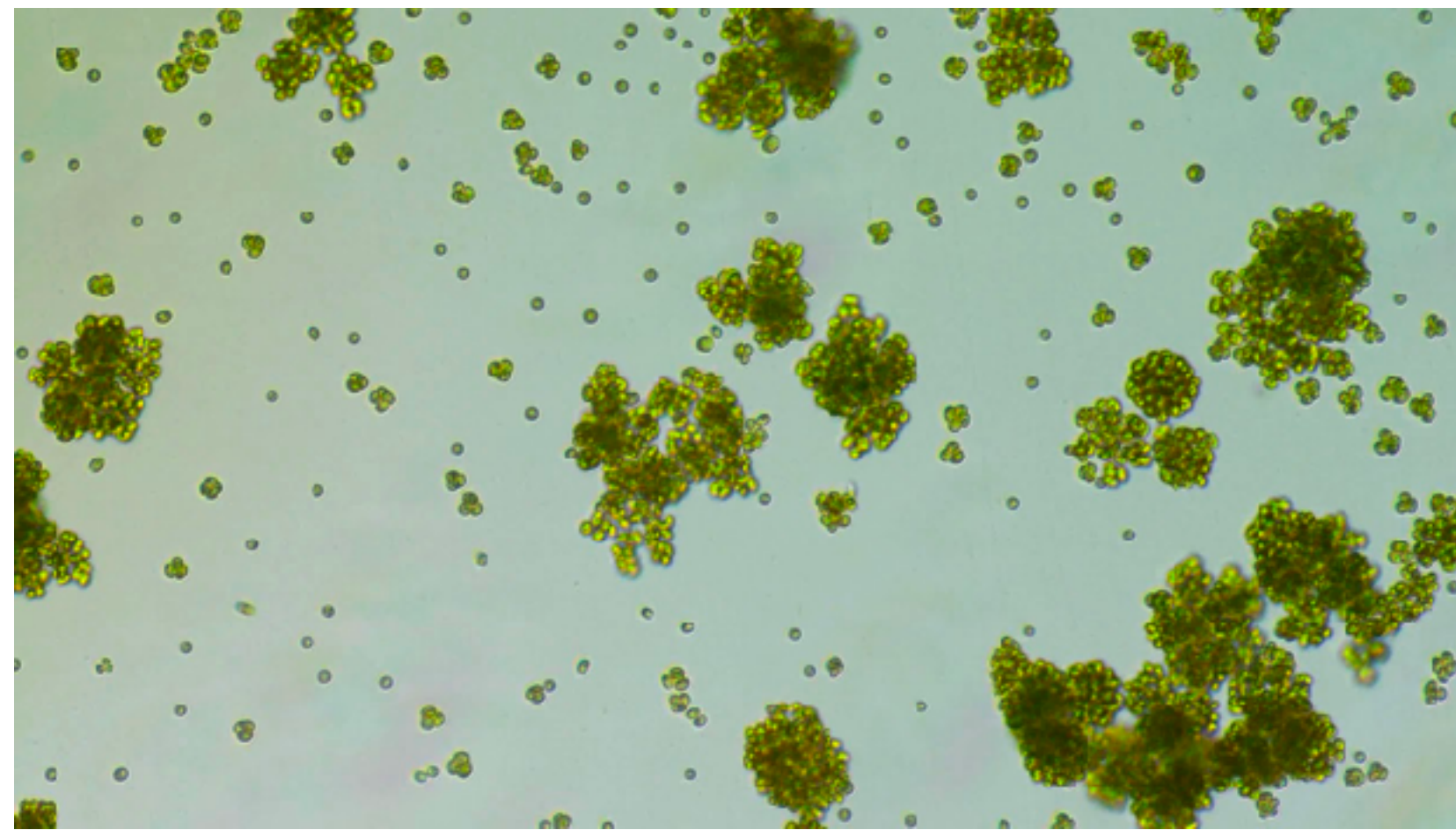


Biologische populaties leven niet alleen

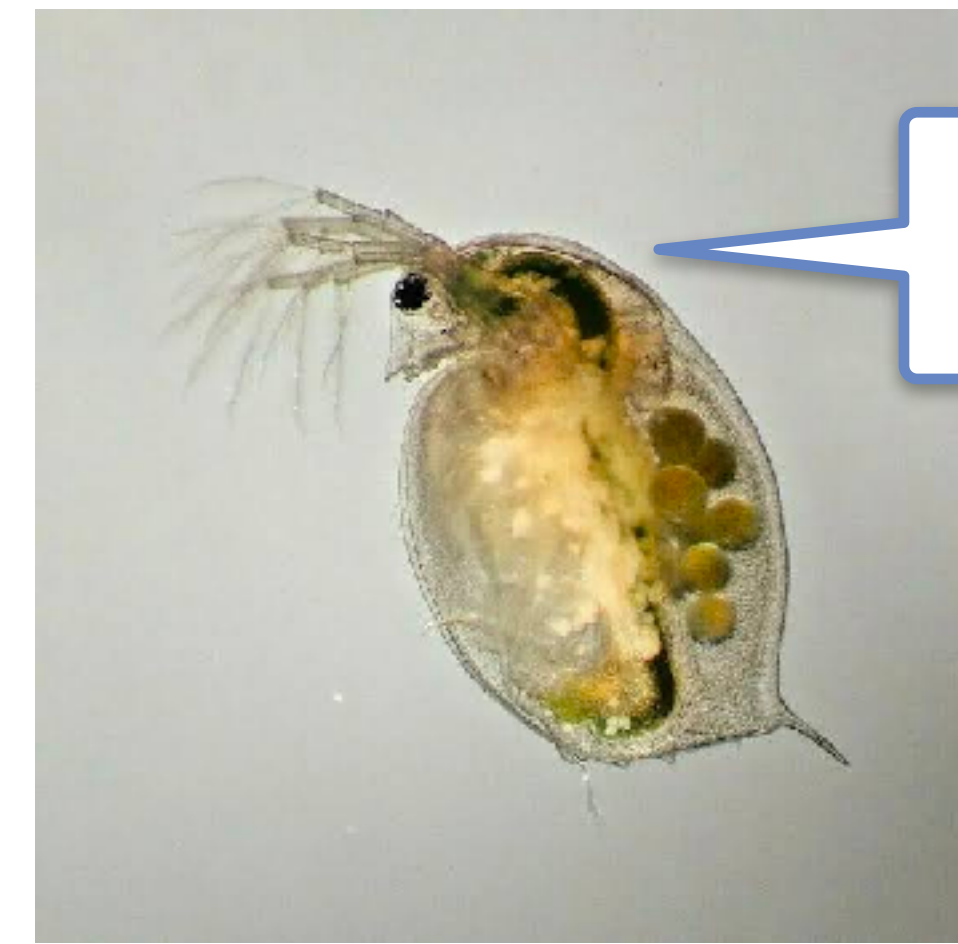
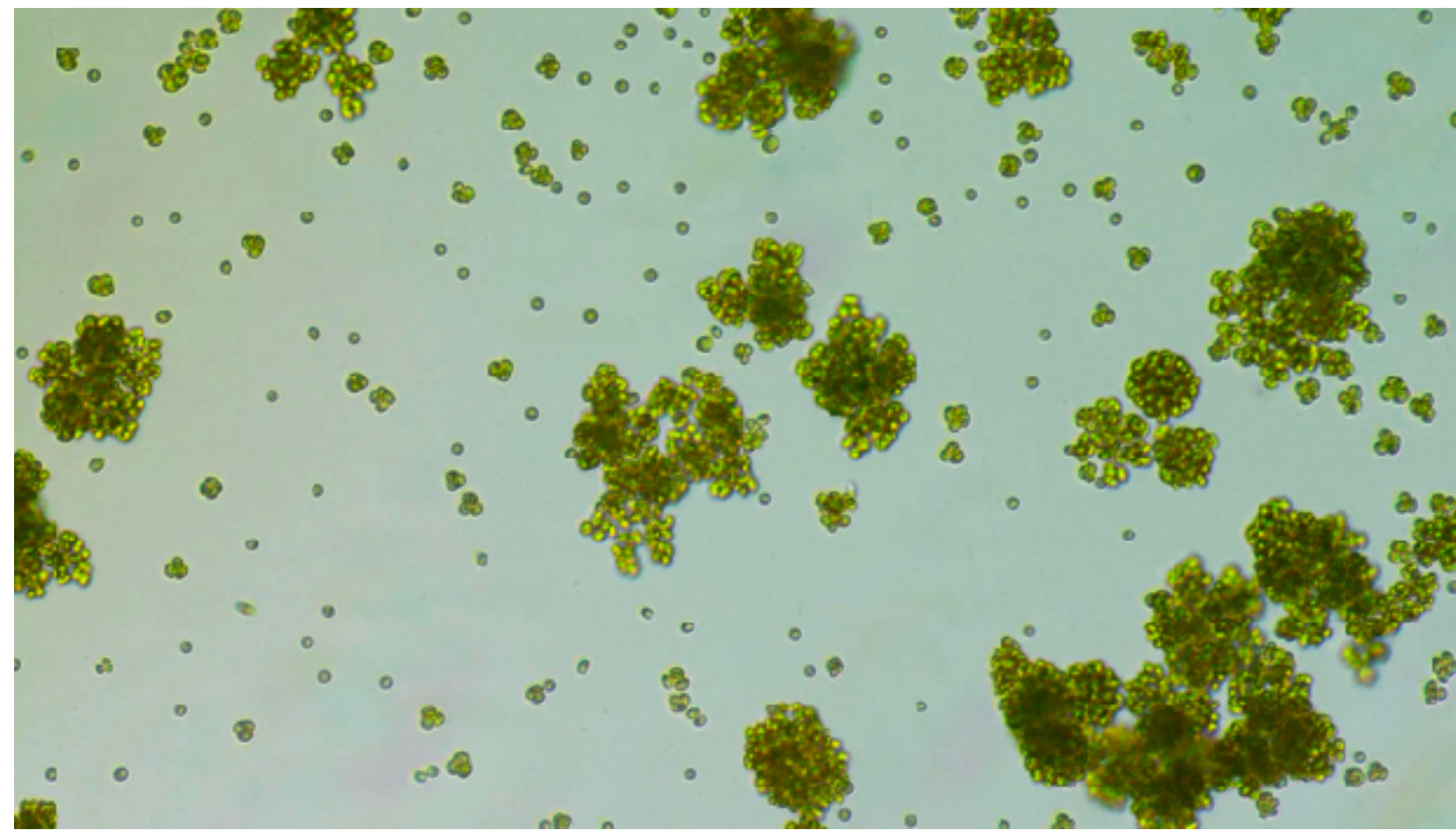
Biologische populaties leven niet alleen



Biologische populaties leven niet alleen



Biologische populaties leven niet alleen



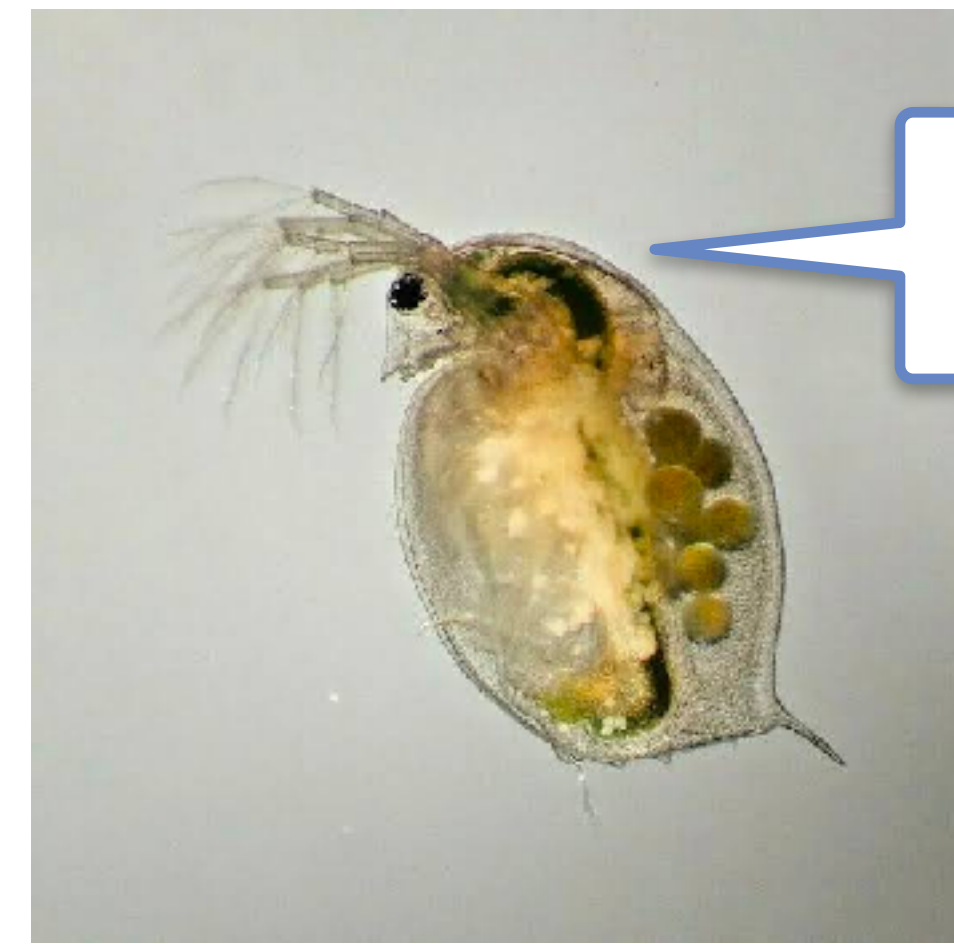
Om-nom-nom!

Biologische populaties leven niet alleen

Ja, ehh, je kan ons wel opeten maar
we groeien lekker terug hoor!



Om-nom-nom!





Predator-prooi interacties

Bram van Dijk (hij/hem)



Hoe hadden we populaties ook alweer gemodelleerd?

Exponentiële groei $\frac{dN}{dt} = rN \rightarrow$ definitie exp. groei

Logistische groei $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$

Logistische groei met birth/death $\frac{dN}{dt} = bN(1 - \frac{N}{K}) - dN$ $\frac{dN}{dt} = bN - d(1 + \frac{N}{K})$



Enkele ODE

Enkele ODE

$$\frac{dN}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte}$$

Enkele ODE

$$\frac{dN}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte}$$

Systemen van ODEs

Enkele ODE

$$\frac{dN}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte}$$

Systemen van ODEs

$$\frac{dProoi}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte} - \text{afname door predatie!}$$

Enkele ODE

$$\frac{dN}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte}$$

Systemen van ODEs

$$\frac{dProoi}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte} - \text{afname door predatie!}$$

$$\frac{dPredator}{dt} = \text{groei door predatie} - \text{sterfte}$$

Enkele ODE

$$\frac{dN}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte}$$

Systemen van ODEs

$$\frac{dProoi}{dt} = \text{groei} - \text{sterfte} - \text{afname door predatie!}$$

$$\frac{dPredator}{dt} = \text{groei door predatie} - \text{sterfte}$$

Deze ODEs zijn dus gekoppeld!

De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

- De konijnen hebben **dichtheidsafhankelijke geboorte** b

De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

- De konijnen hebben **dichtheidsafhankelijke geboorte** b
- De konijnen **sterven met een vaste snelheid** d

De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

- De konijnen hebben **dichtheidsafhankelijke geboorte** b
- De konijnen **sterven met een vaste snelheid** d
- Predatie gebeurt met snelheid a . Hoe meer konijnen en vossen, hoe meer predatie er zal plaatsvinden.

De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

- De konijnen hebben **dichtheidsafhankelijke geboorte** b
- De konijnen **sterven met een vaste snelheid** d
- Predatie gebeurt met snelheid a . Hoe meer konijnen en vossen, hoe meer predatie er zal plaatsvinden.
- De groeisnelheid van vossen wordt **uitsluitend bepaald door predatie**

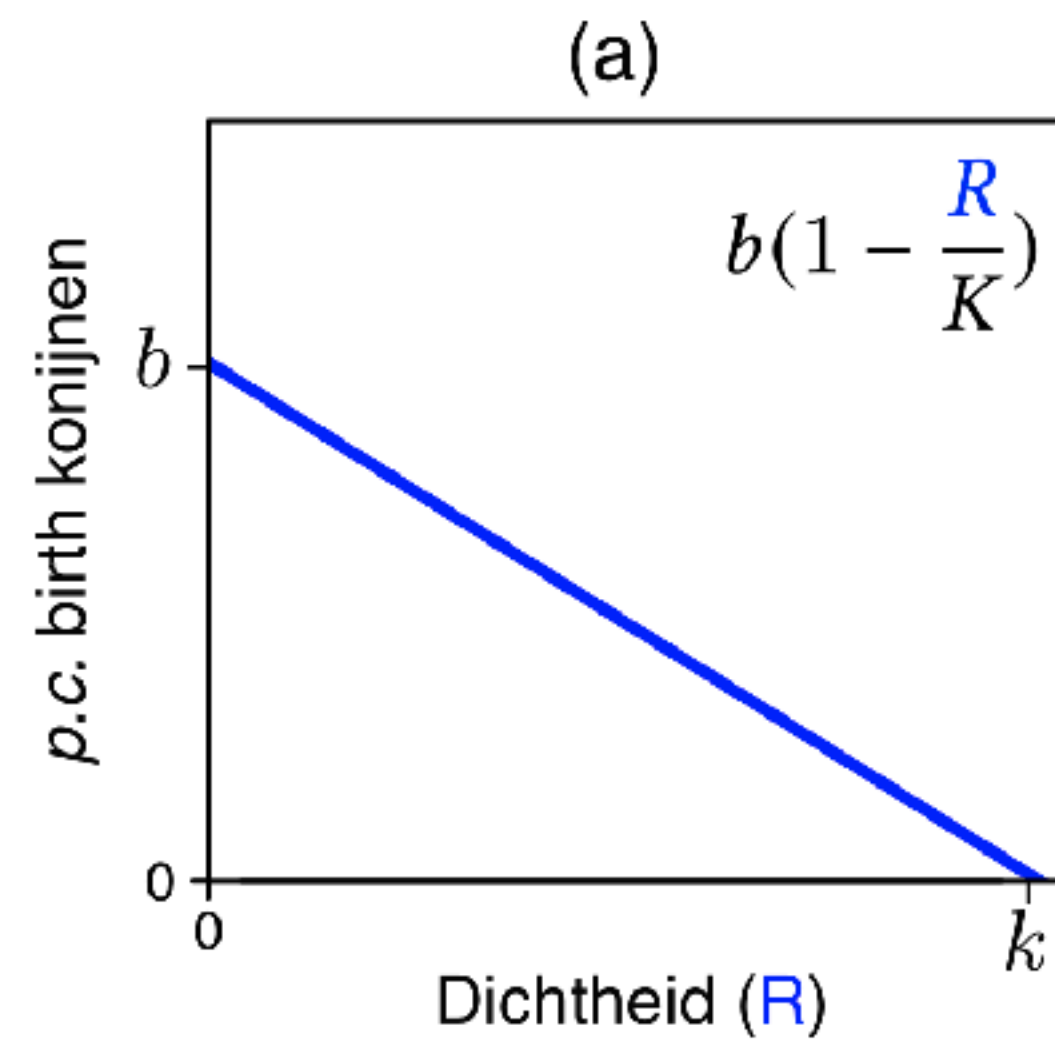
De wiskunde komt later wel: eerst aannames!

- De konijnen hebben **dichtheidsafhankelijke geboorte** b
- De konijnen **sterven met een vaste snelheid** d
- Predatie gebeurt met snelheid a . Hoe meer konijnen en vossen, hoe meer predatie er zal plaatsvinden.
- De groeisnelheid van vossen wordt **uitsluitend bepaald door predatie**
- Ook vossen sterven met een **vaste snelheid** δ

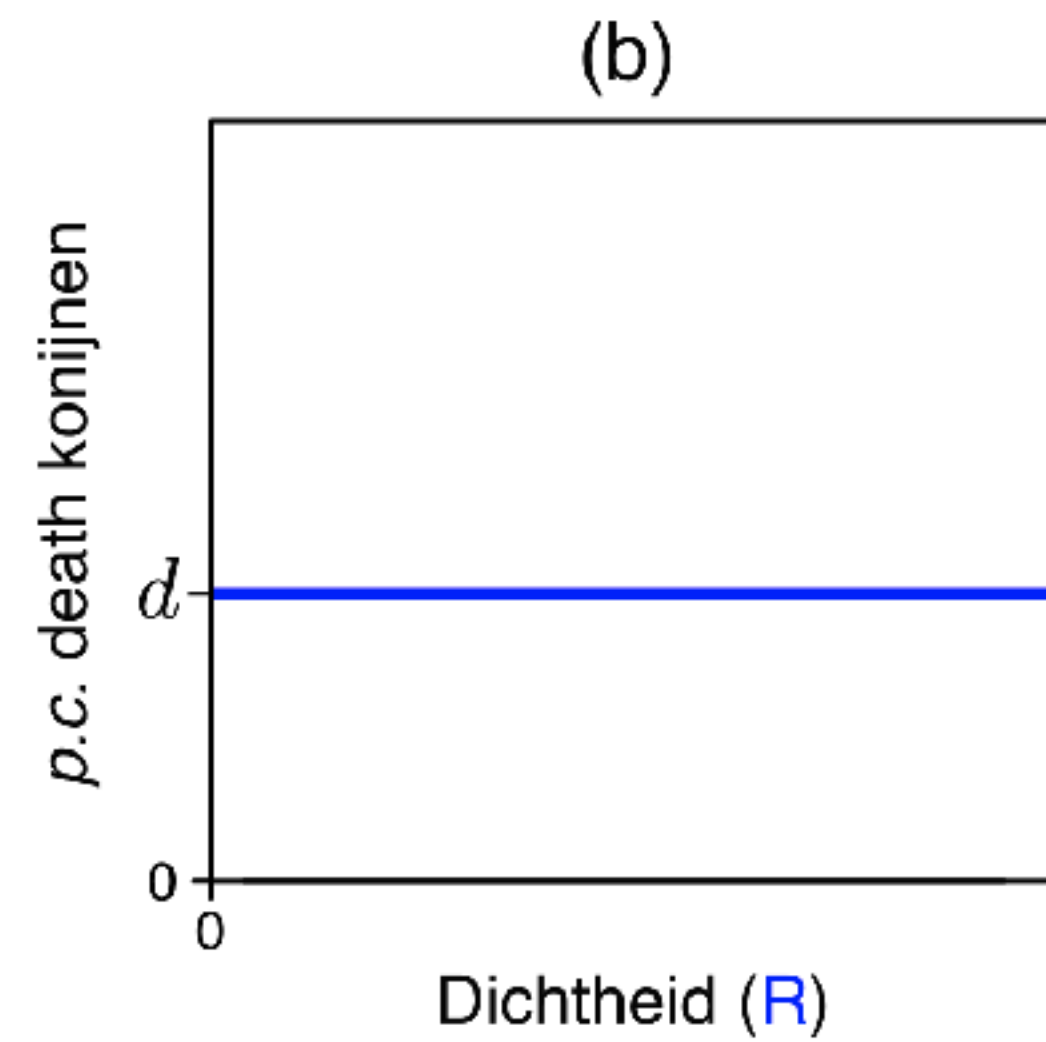
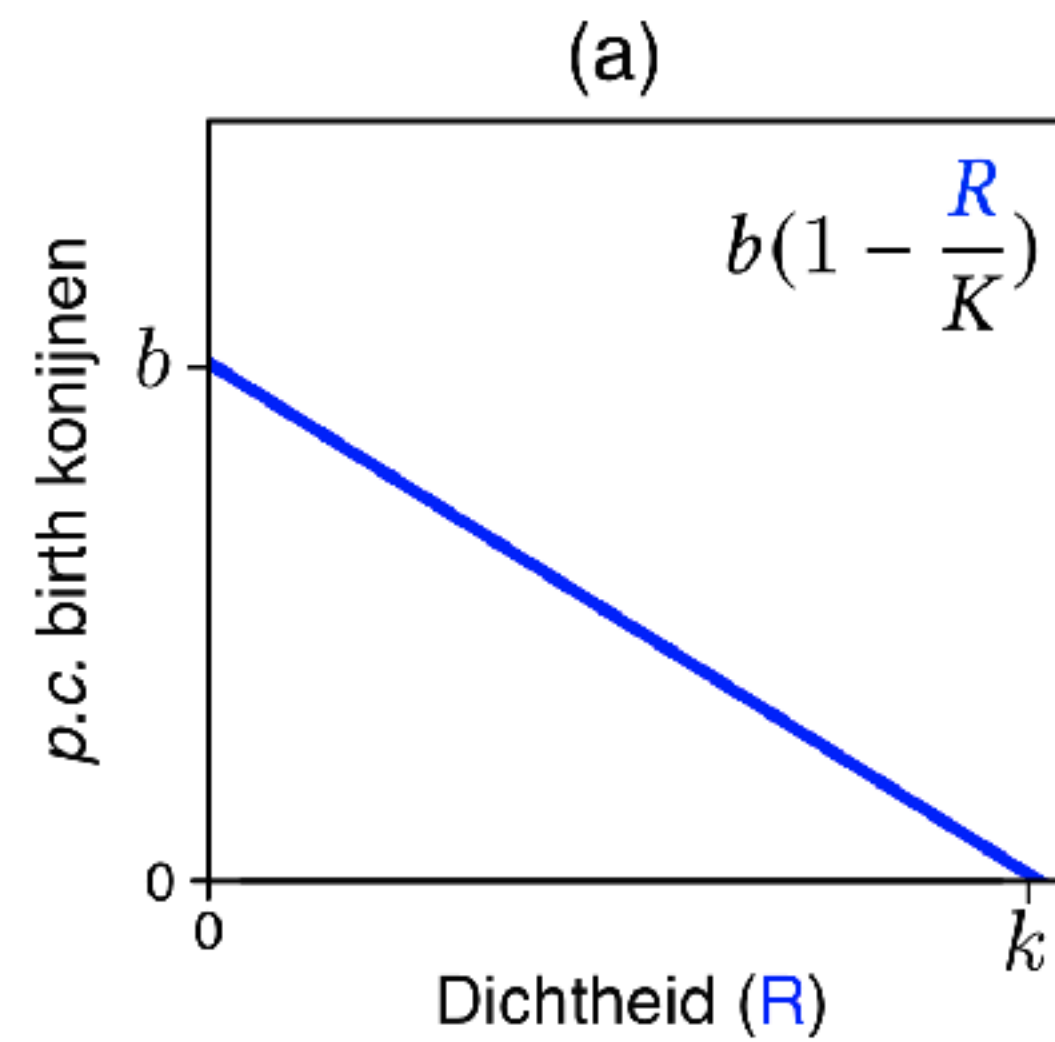
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



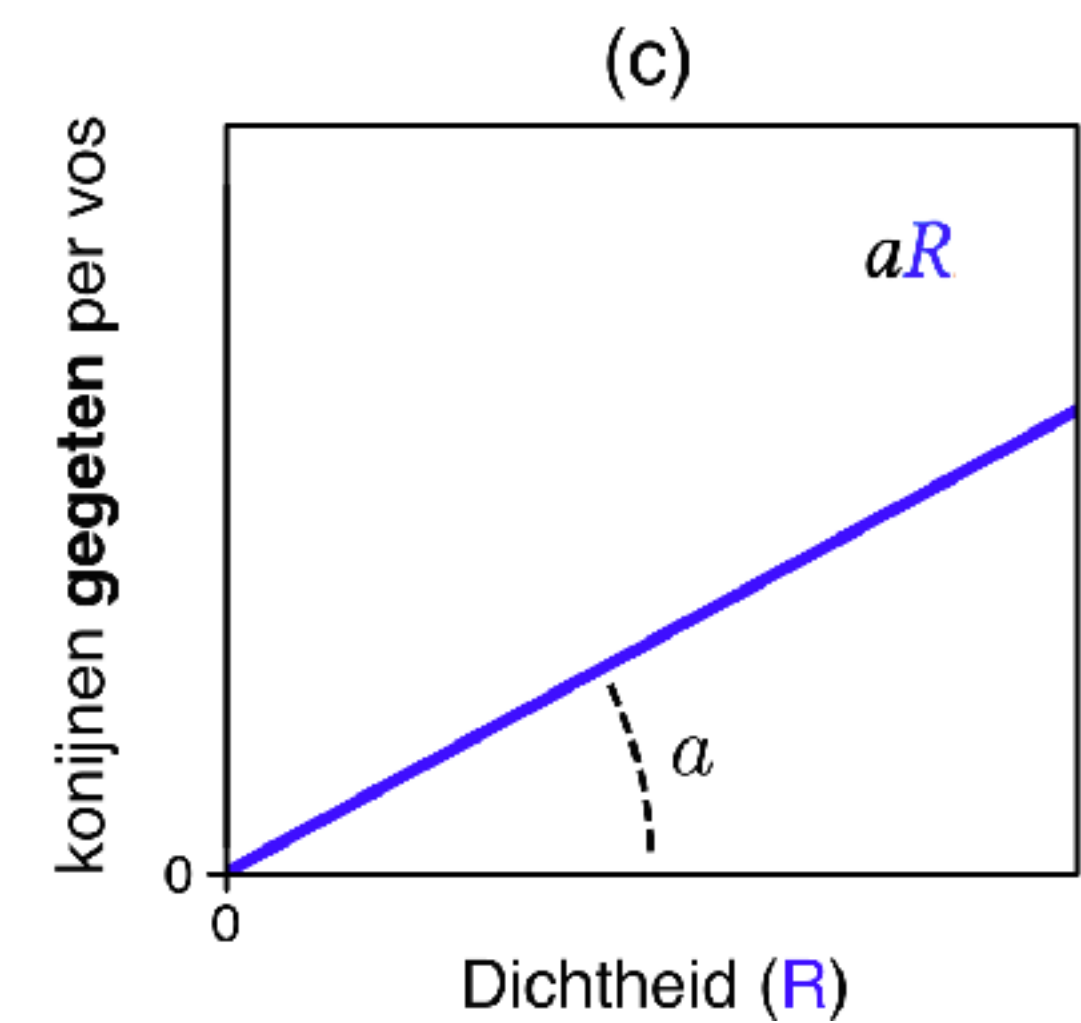
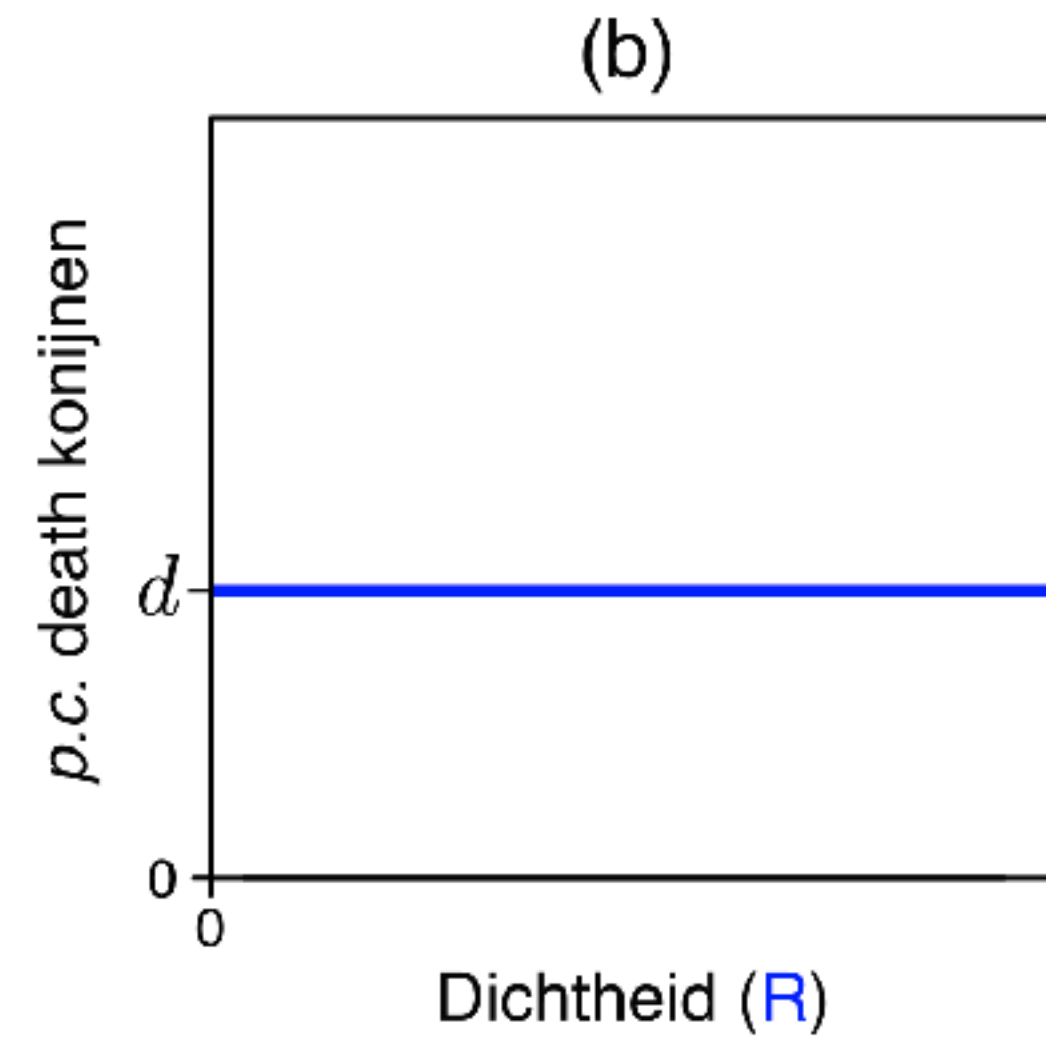
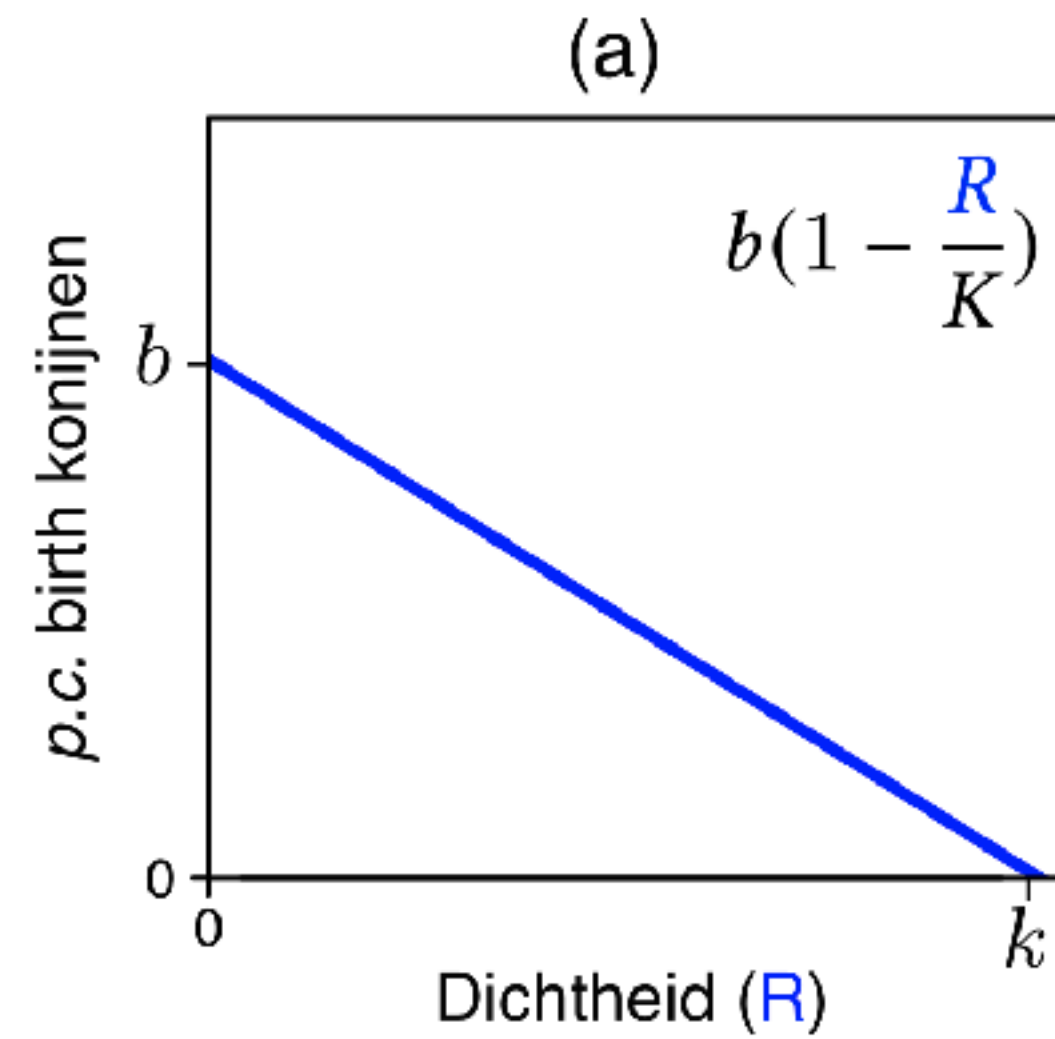
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



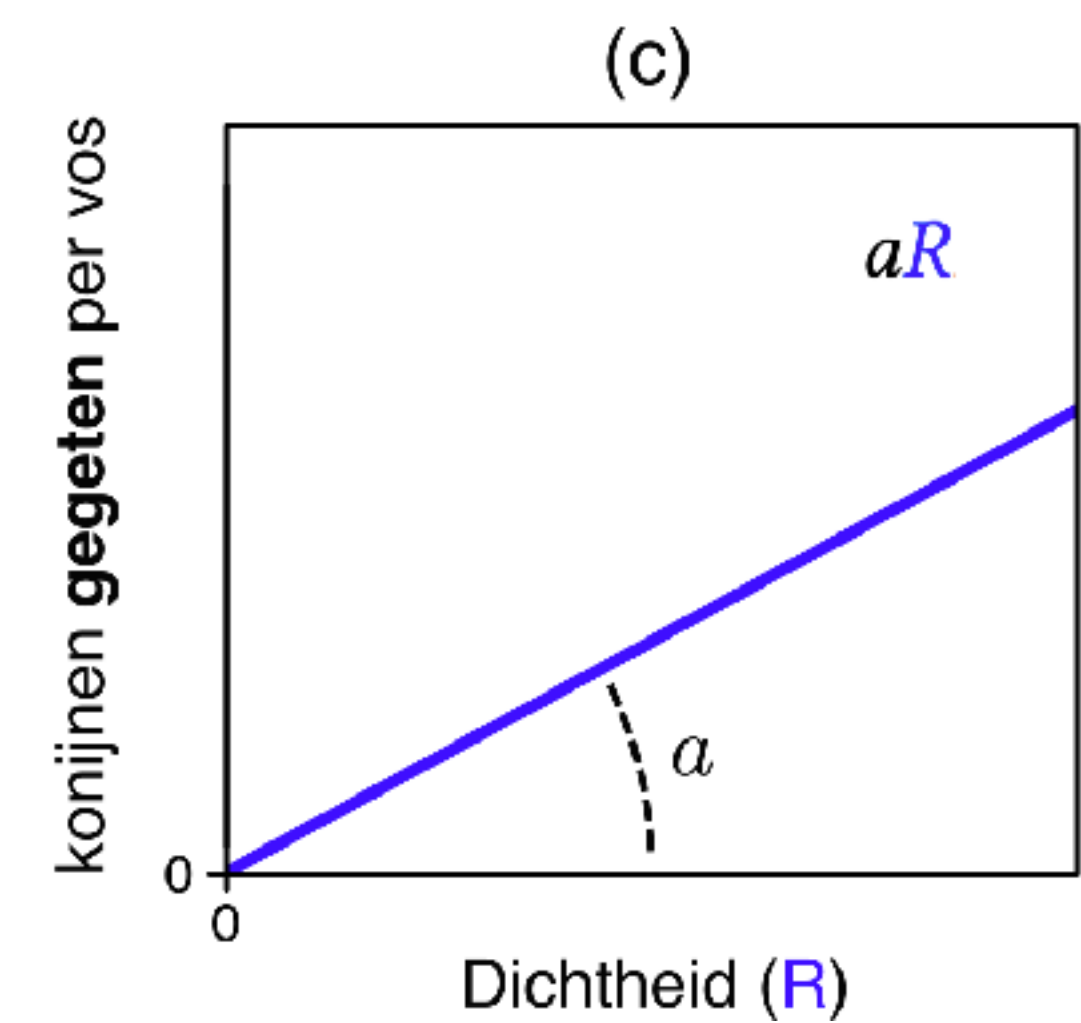
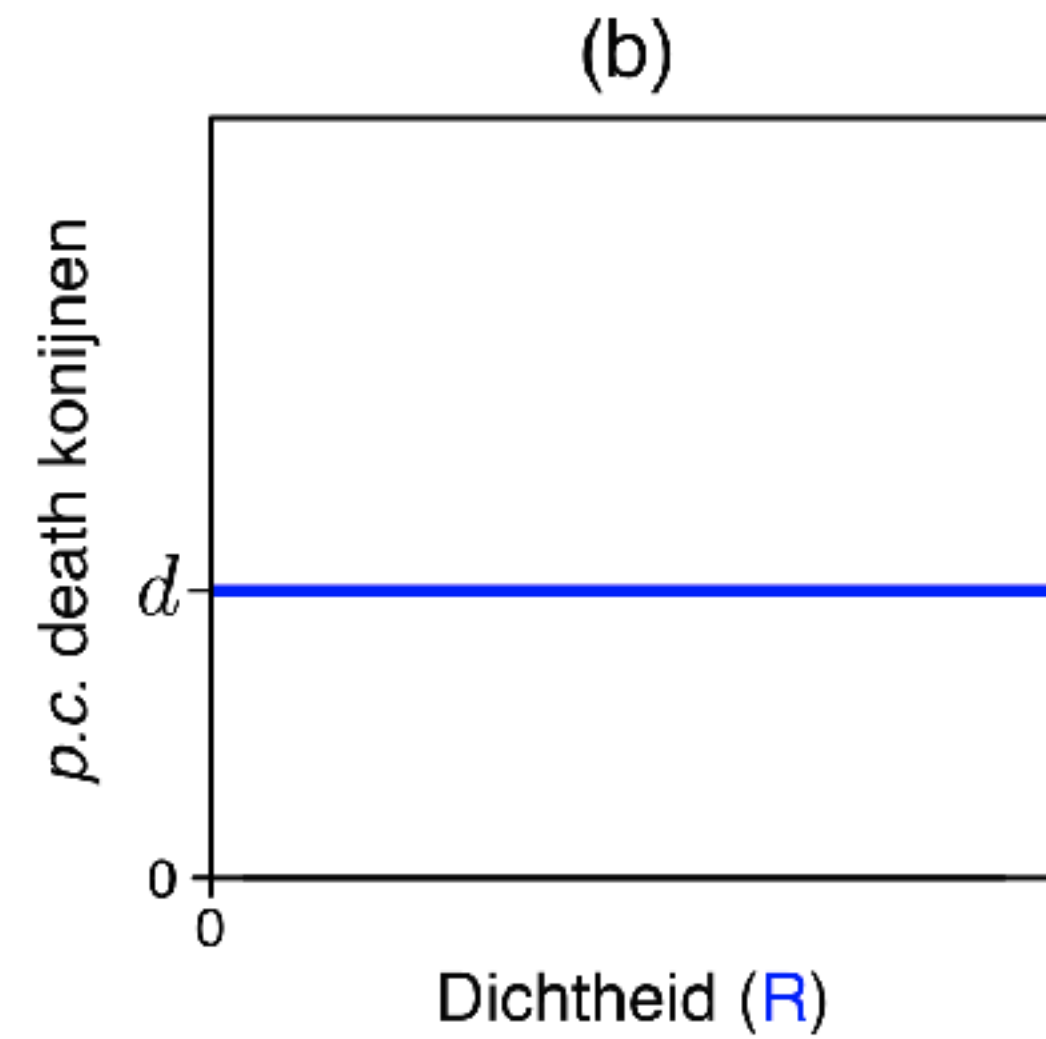
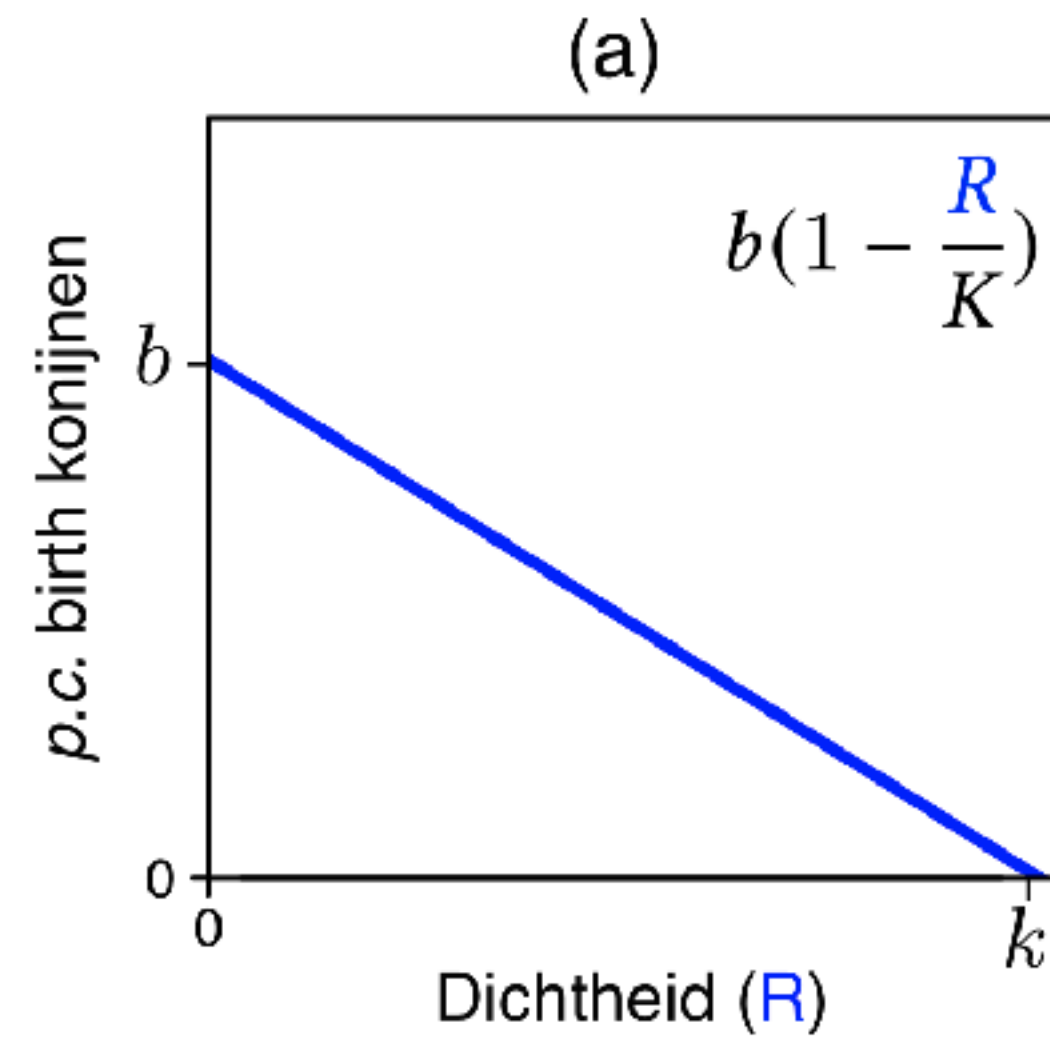
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



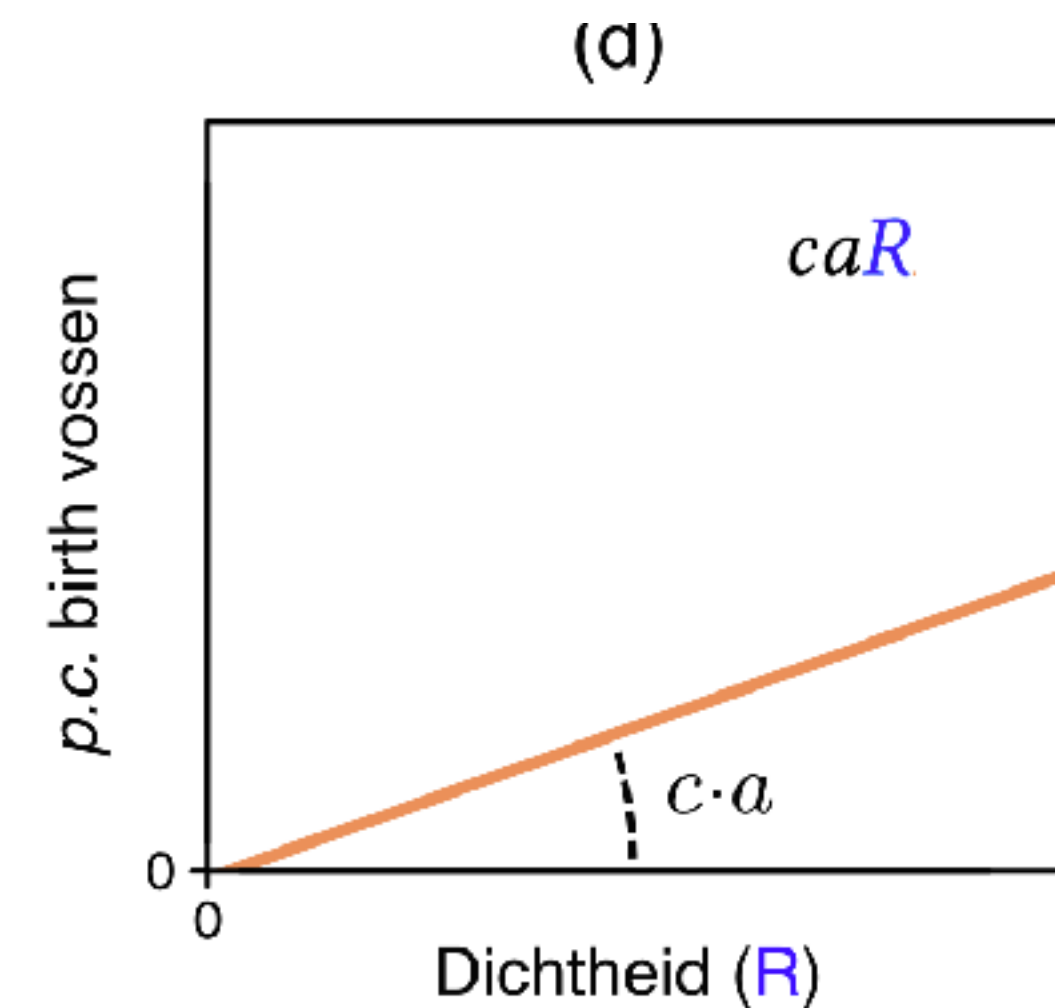
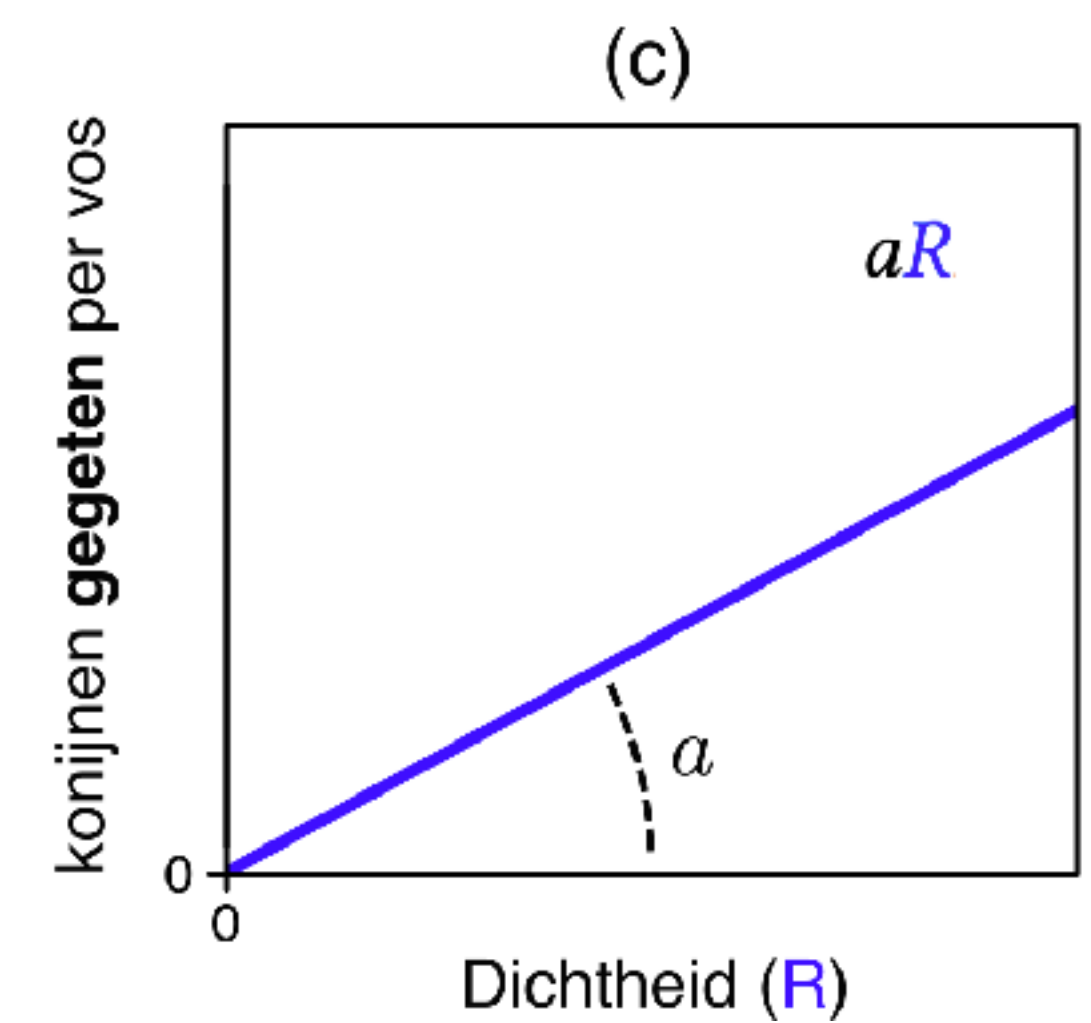
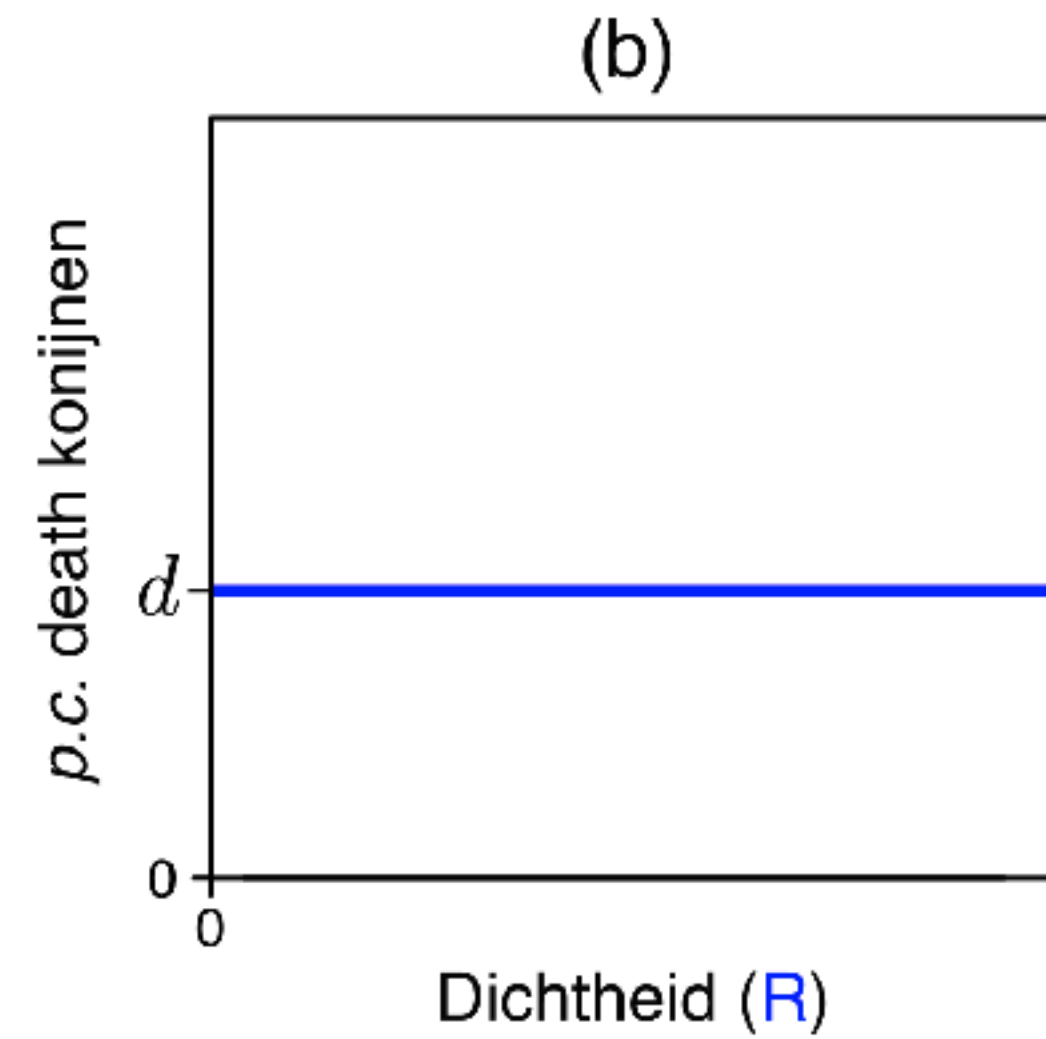
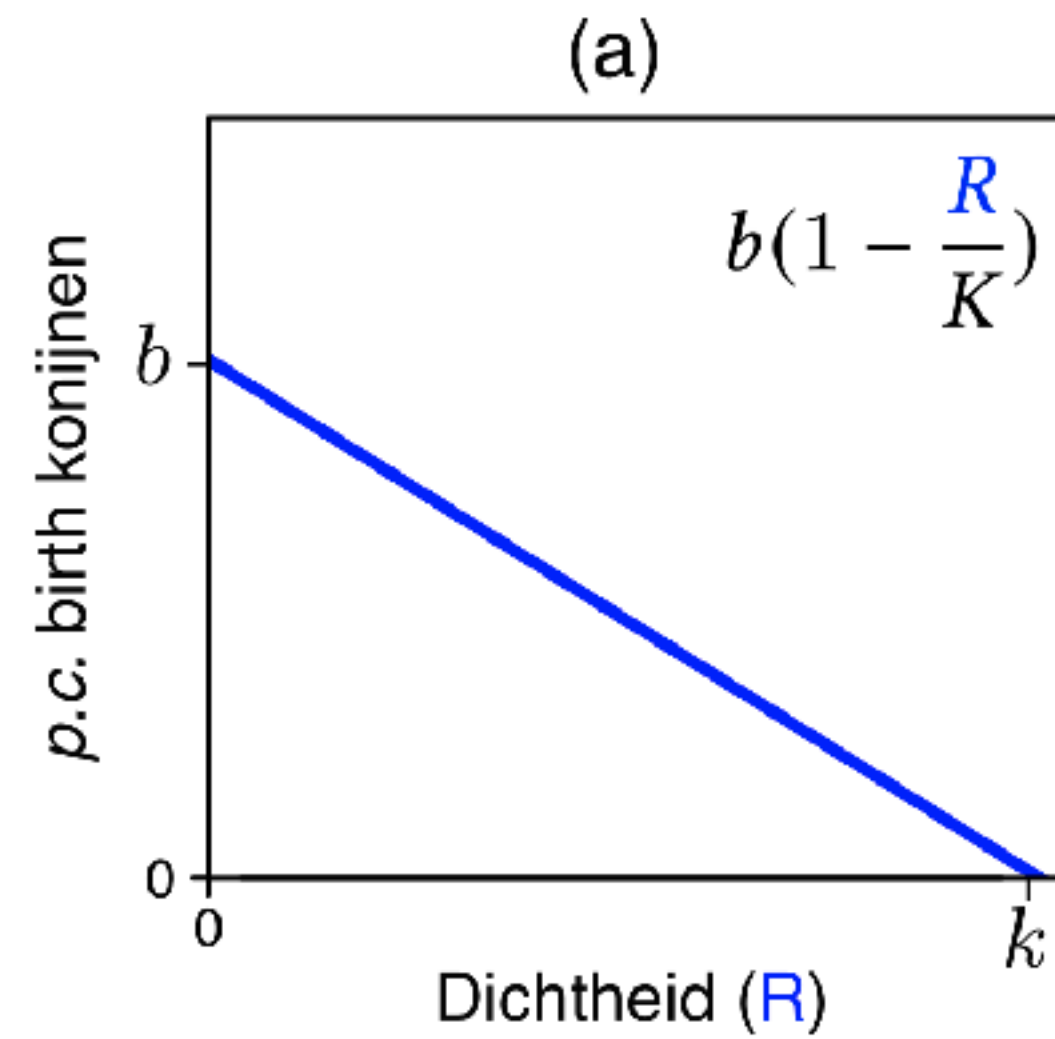
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



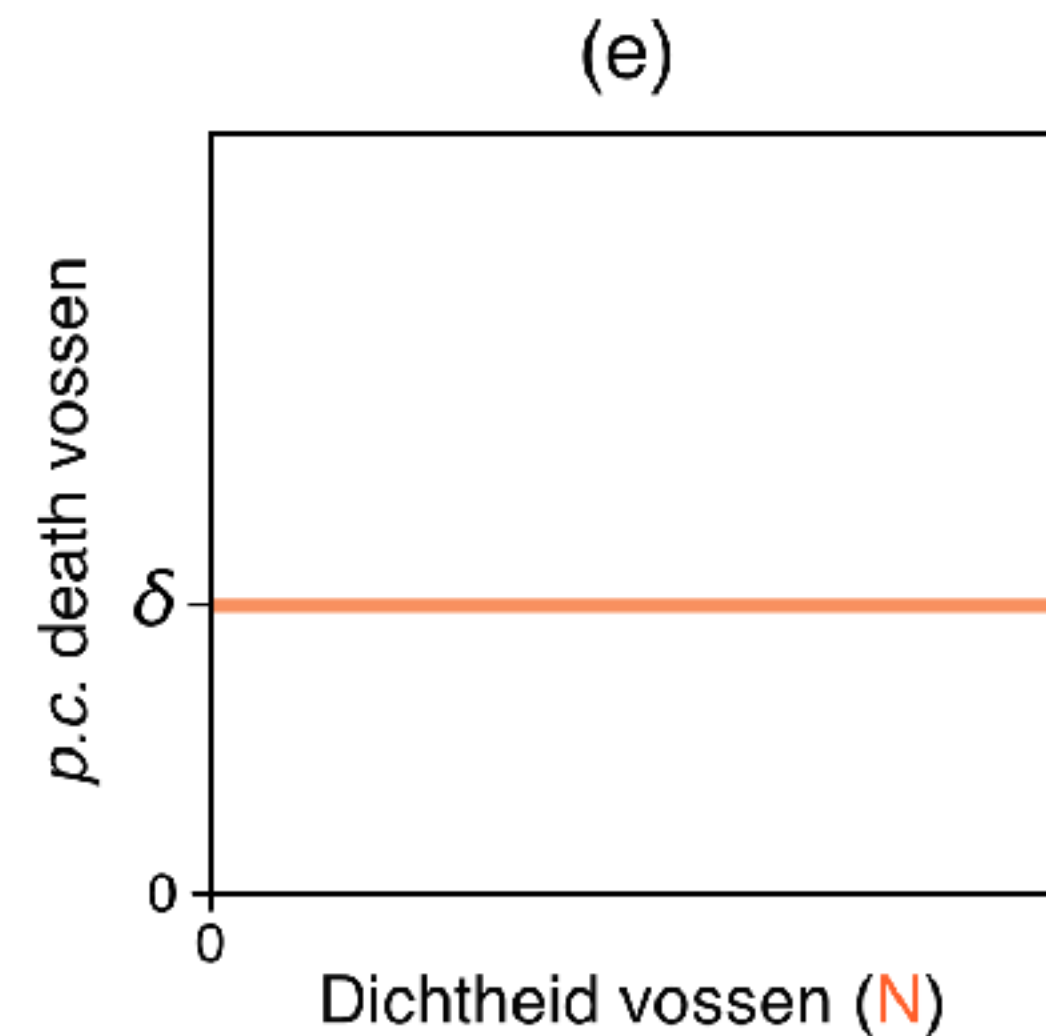
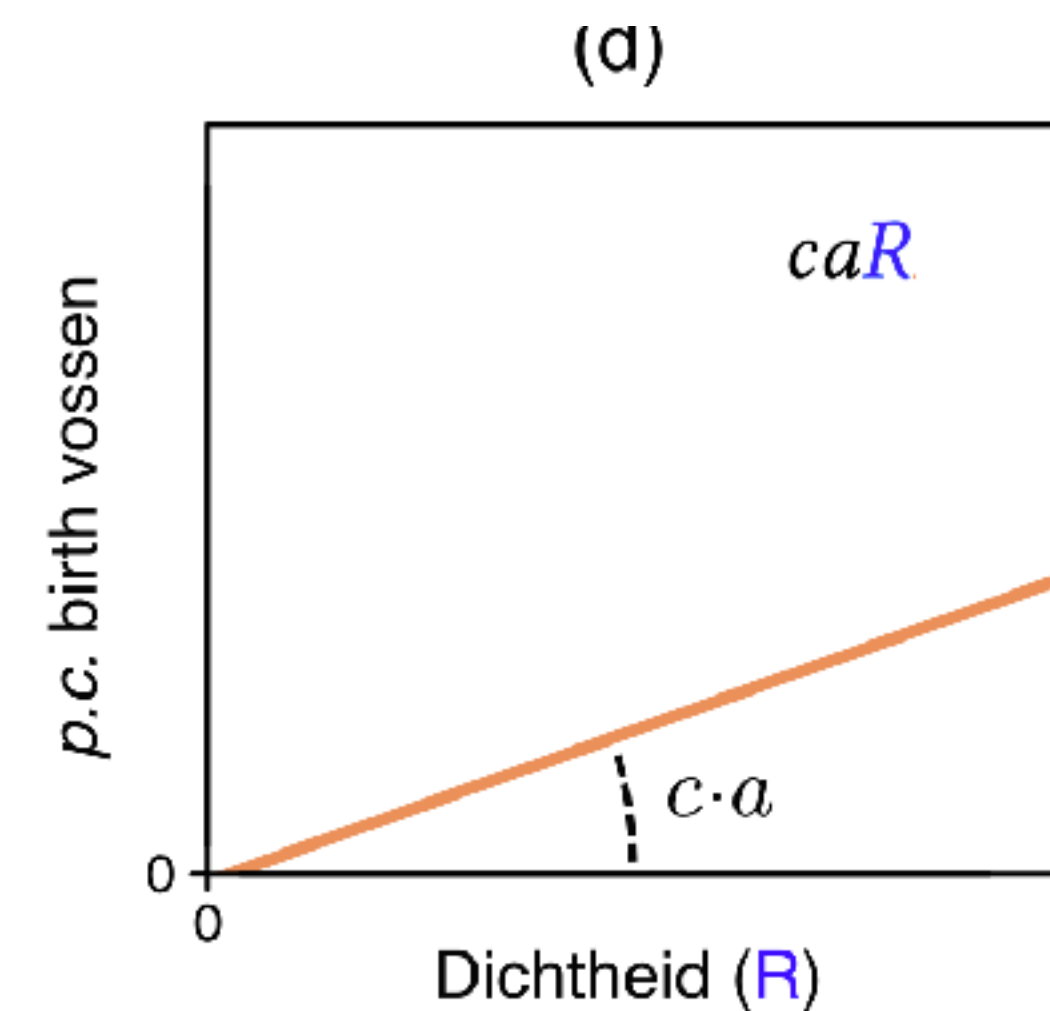
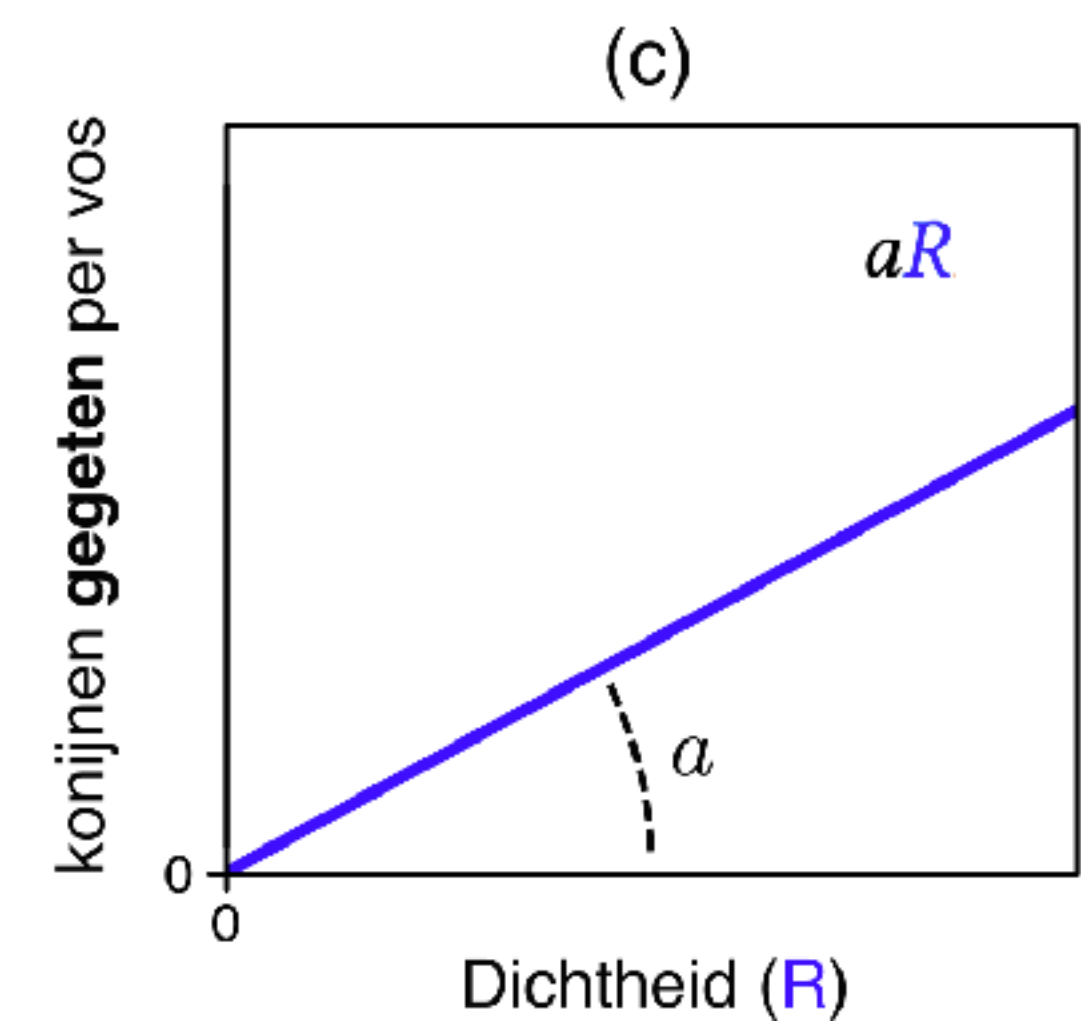
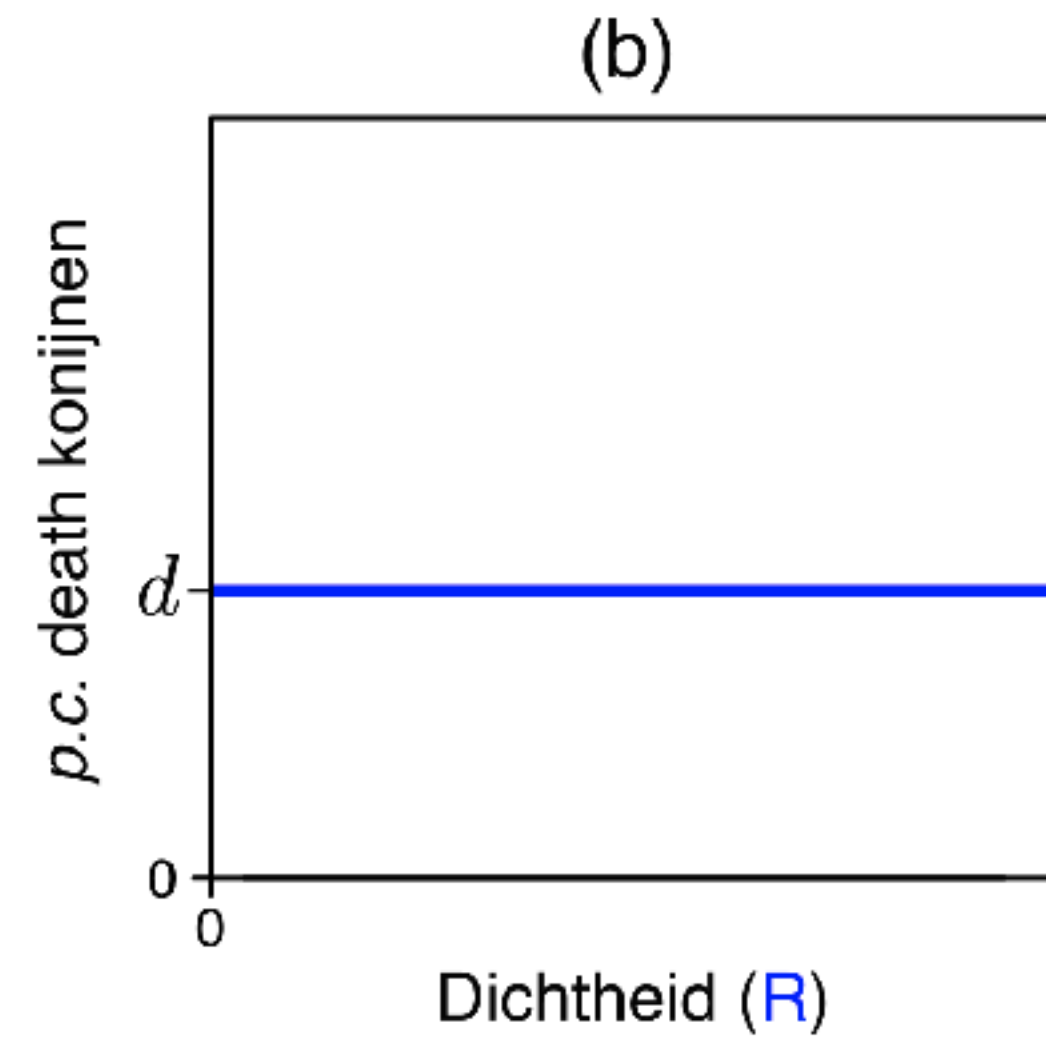
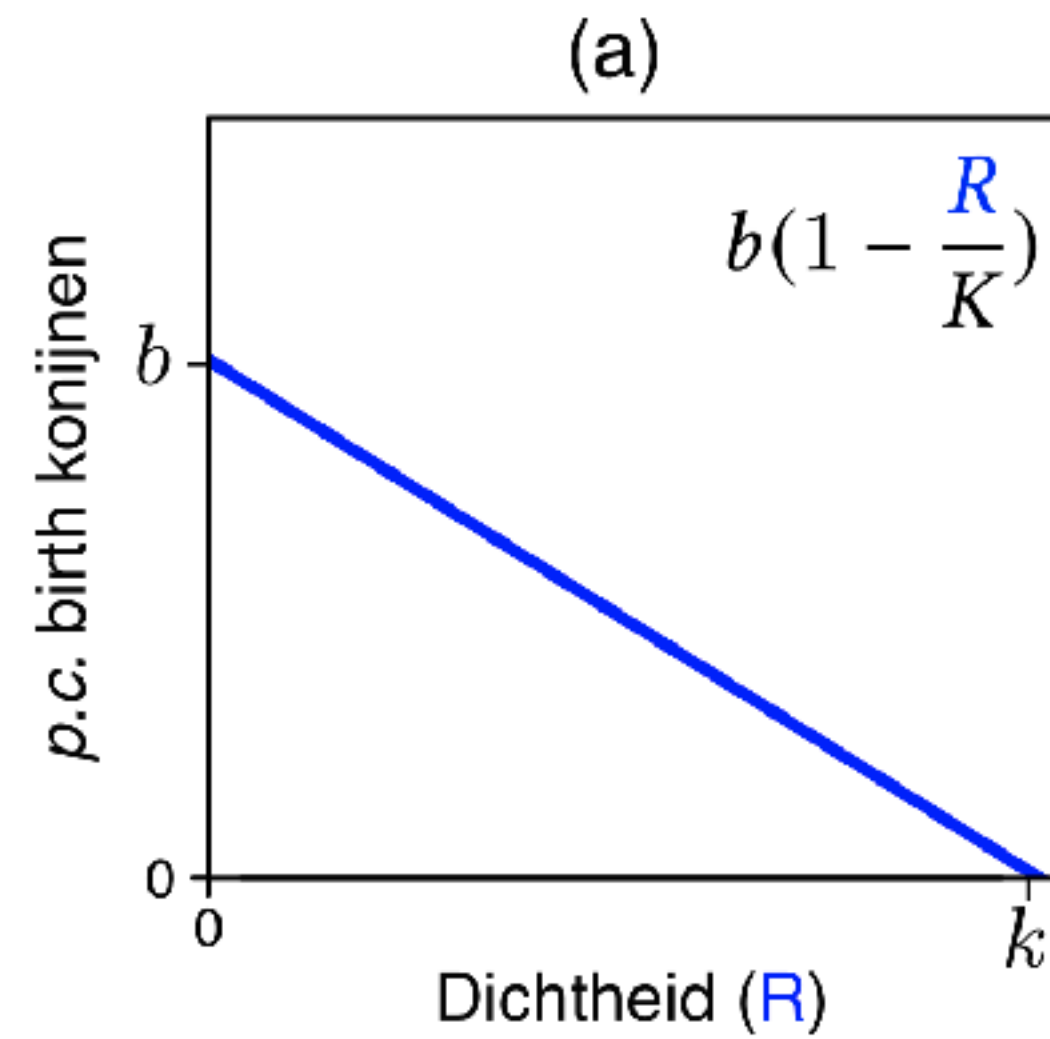
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



Laten we simpel beginnen: lineaire functies



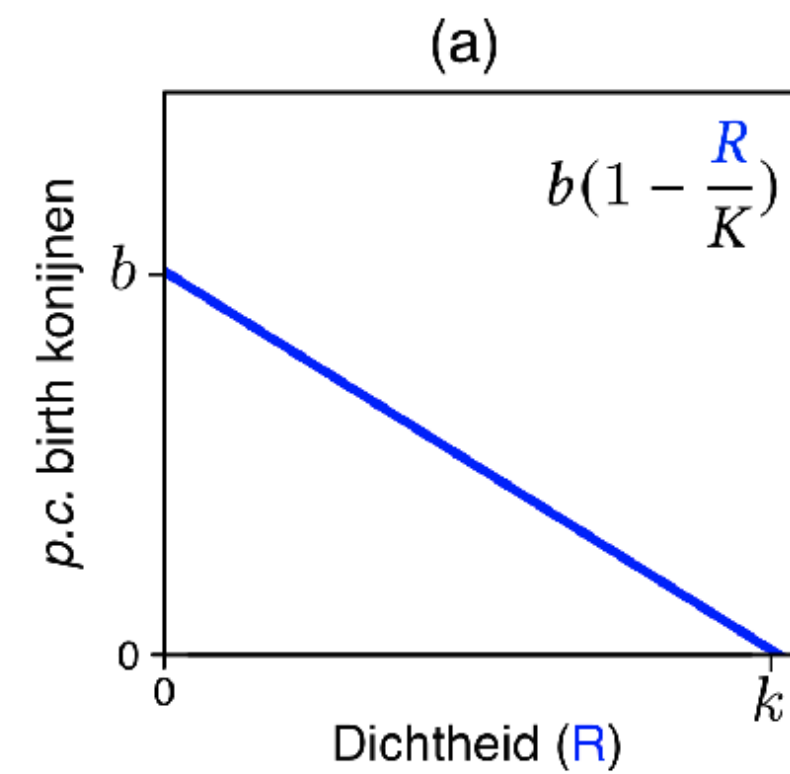
Laten we simpel beginnen: lineaire functies



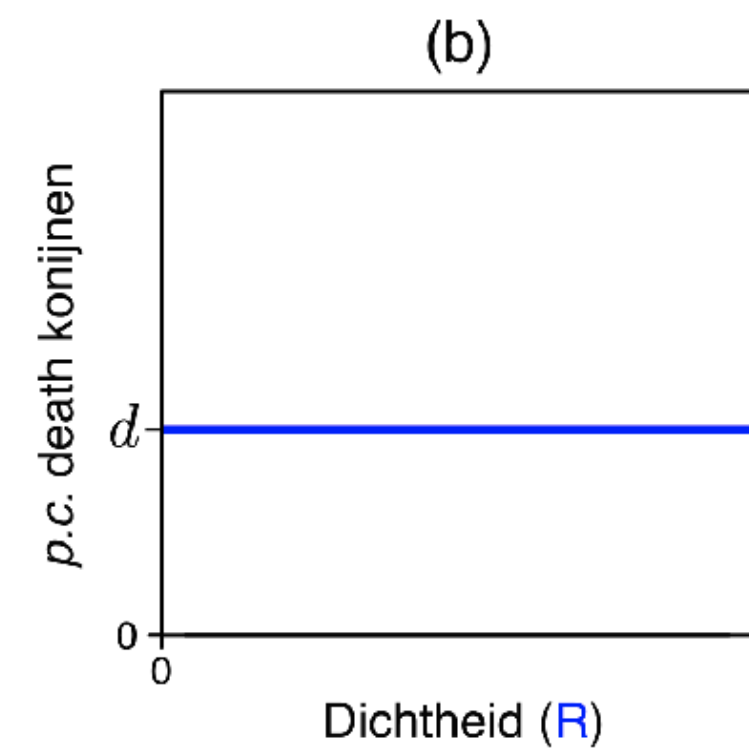
Laten we simpel beginnen: lineaire functies

konijnen

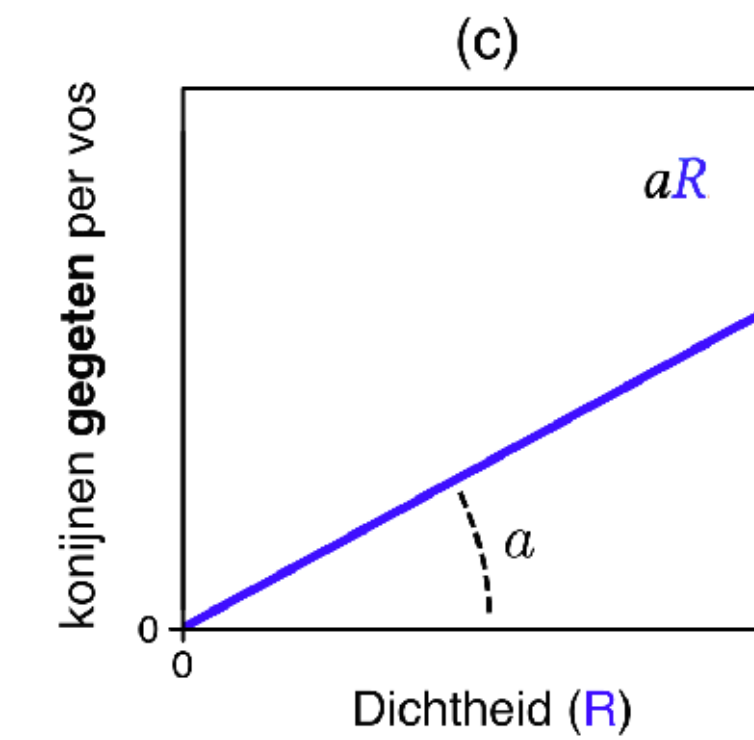
$$\frac{dR}{dt} =$$



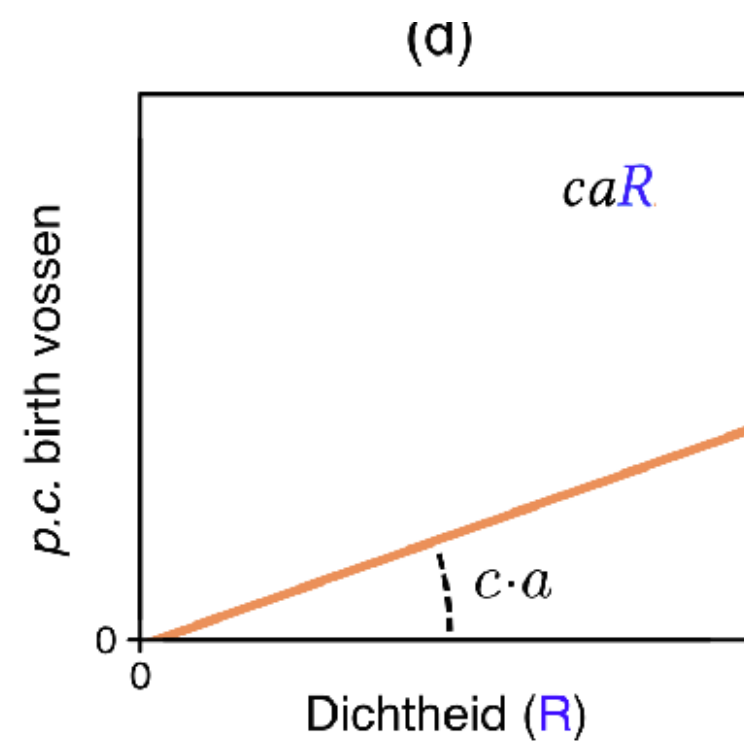
—



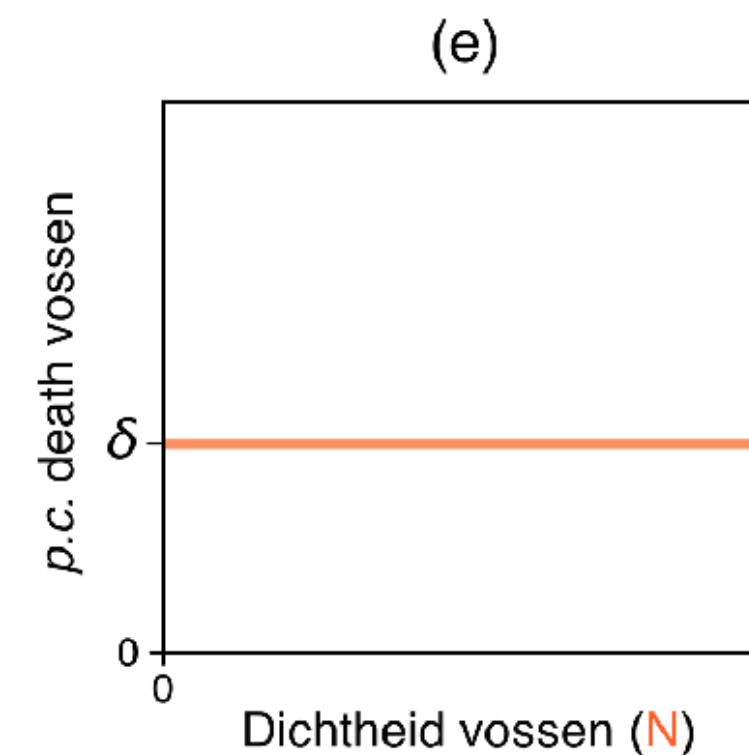
—



$$\frac{dN}{dt} =$$



—



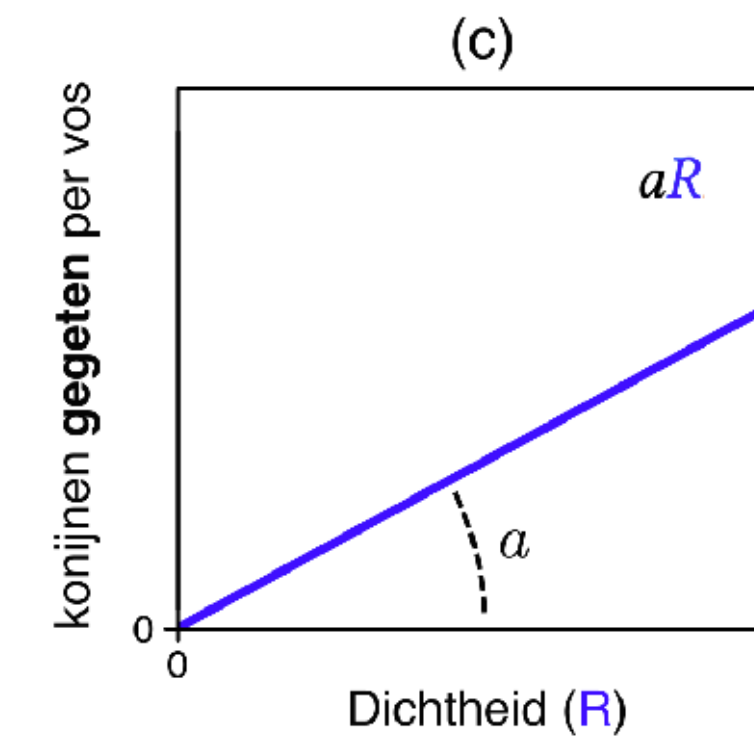
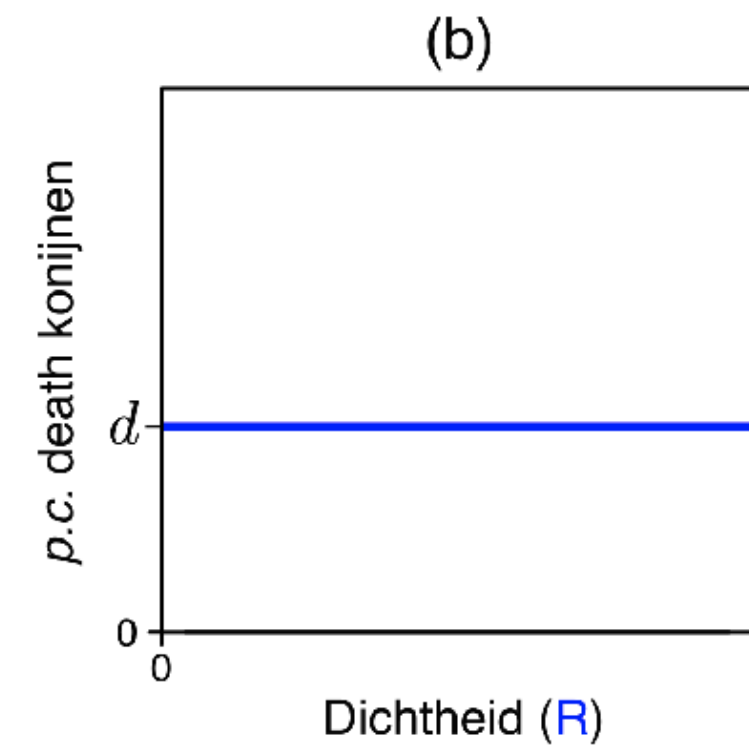
—

Laten we simpel beginnen: lineaire functies

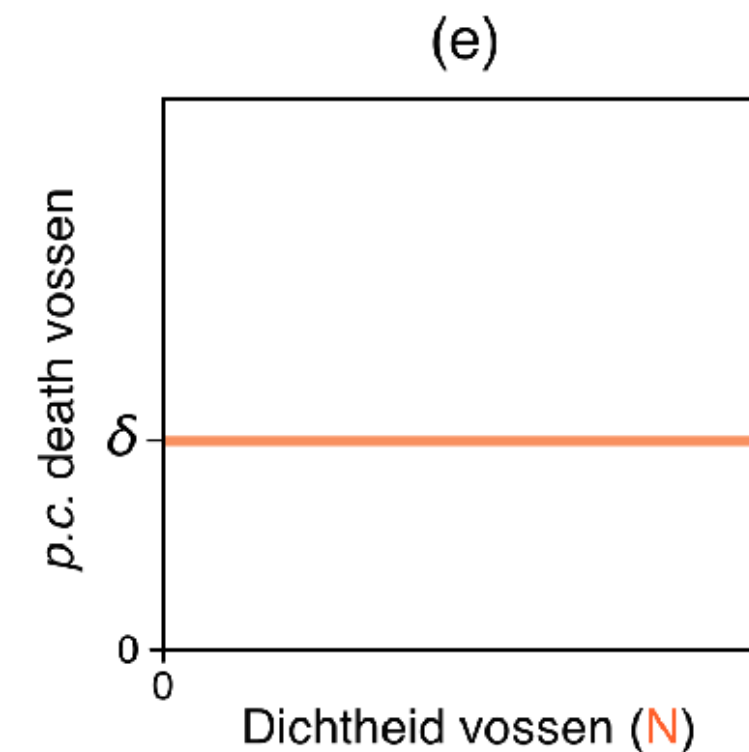
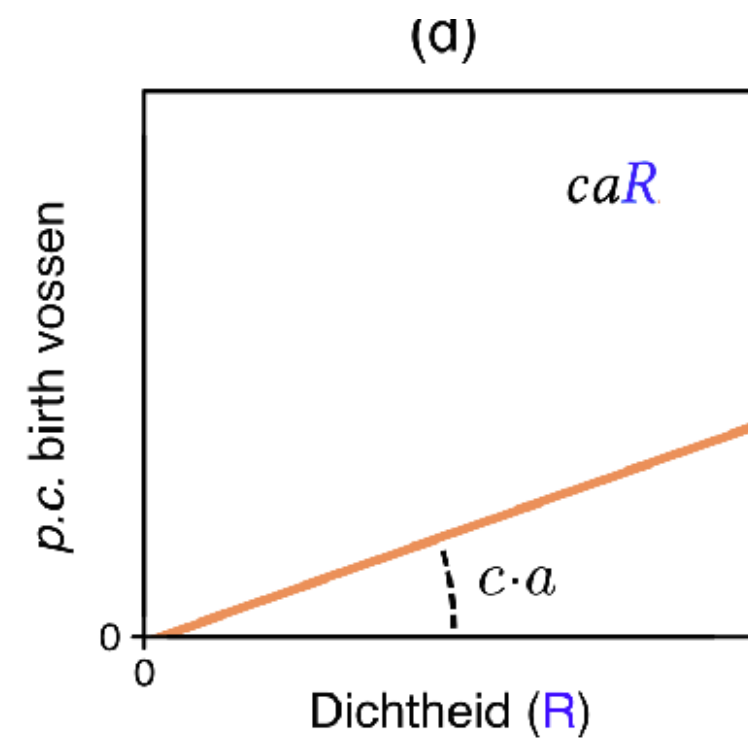
per capita!

$$\frac{dR}{dt} =$$

$$b\left(1 - \frac{R}{K}\right) -$$

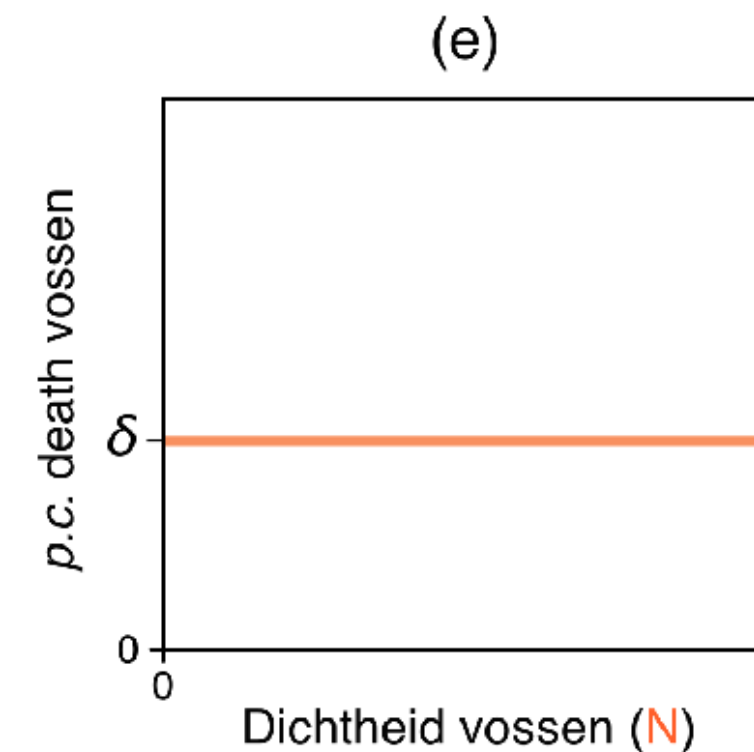
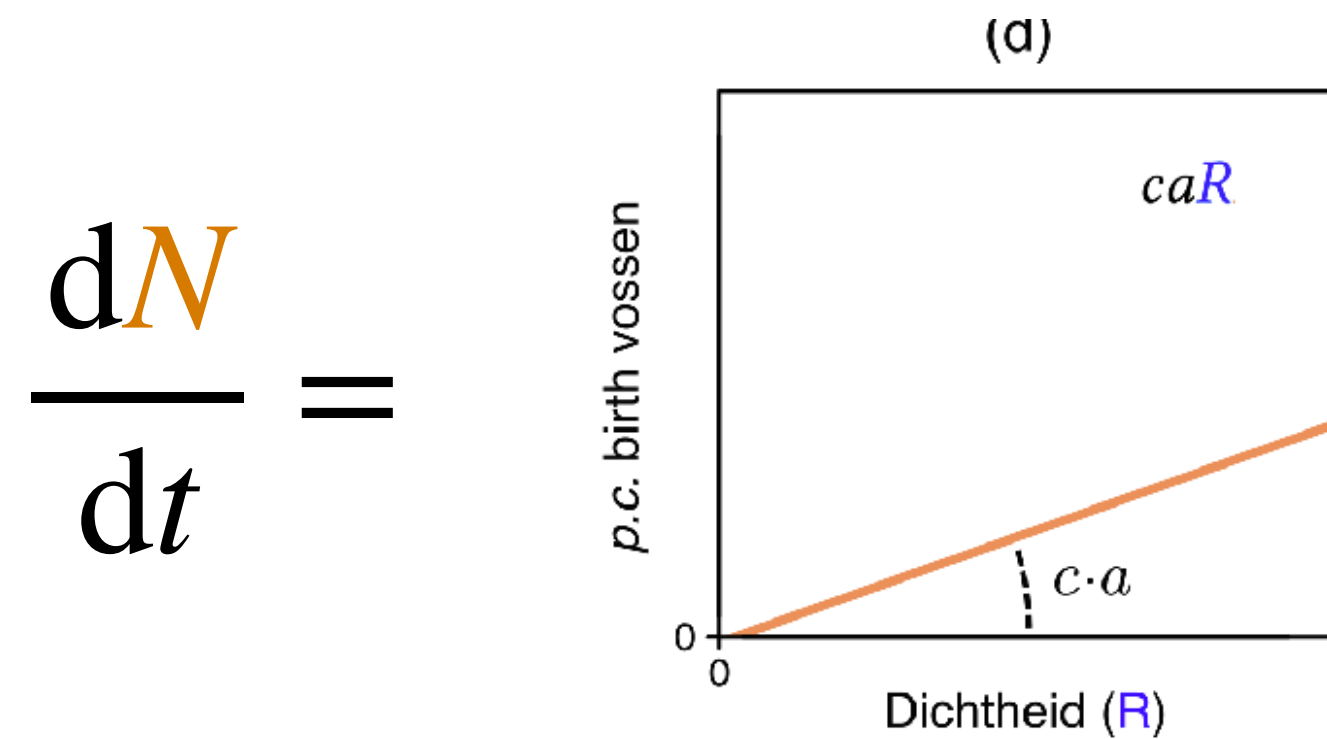
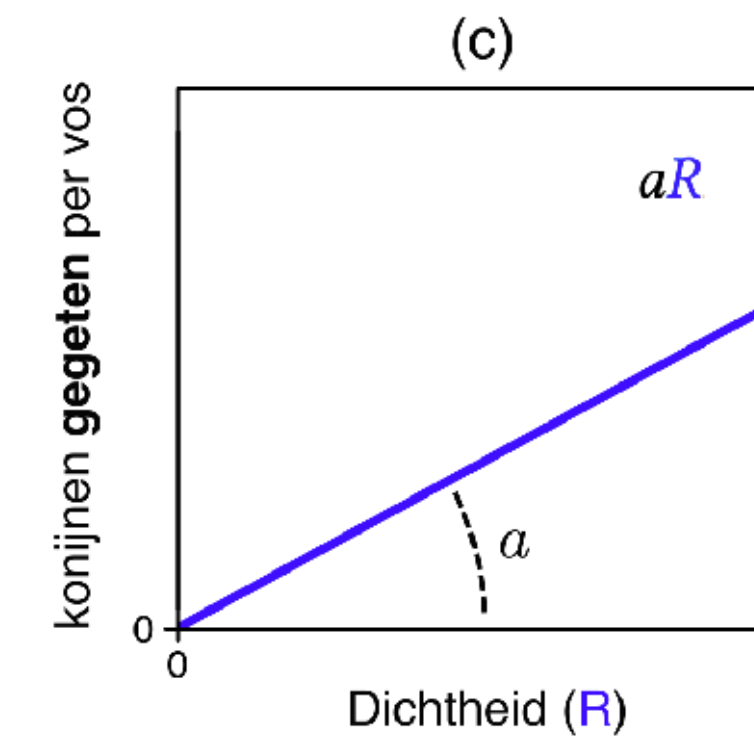
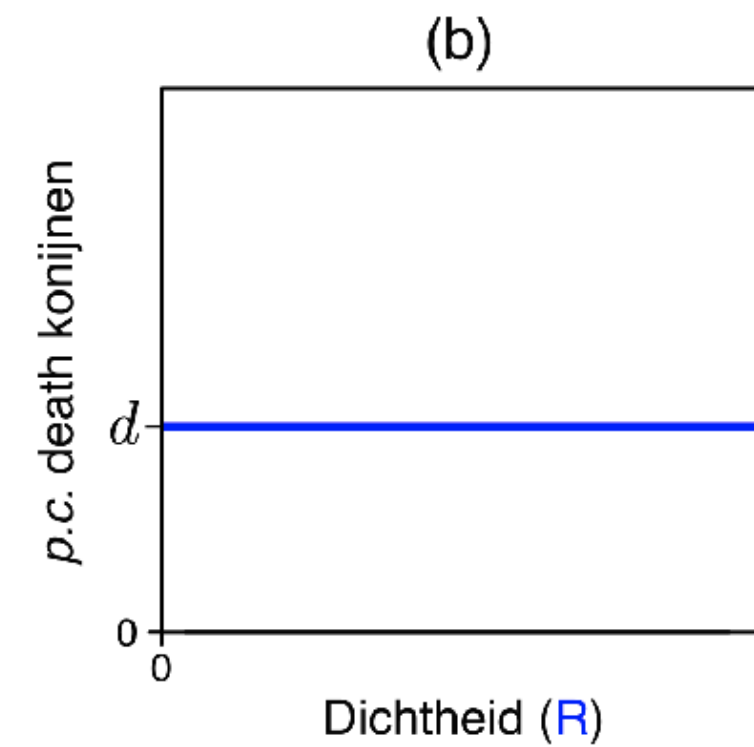


$$\frac{dN}{dt} =$$



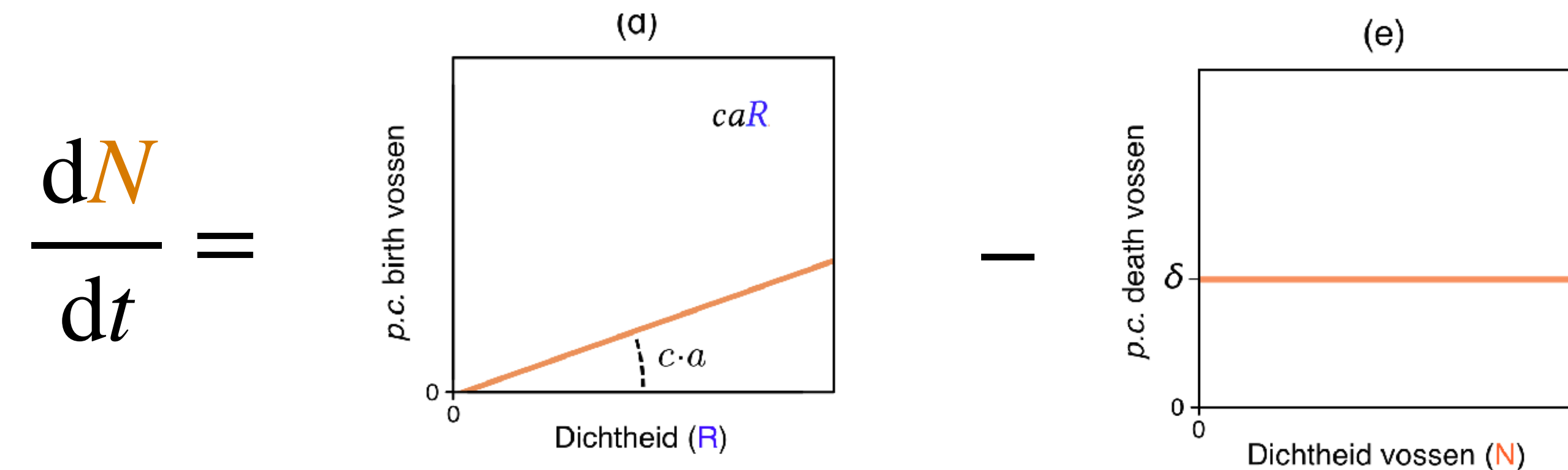
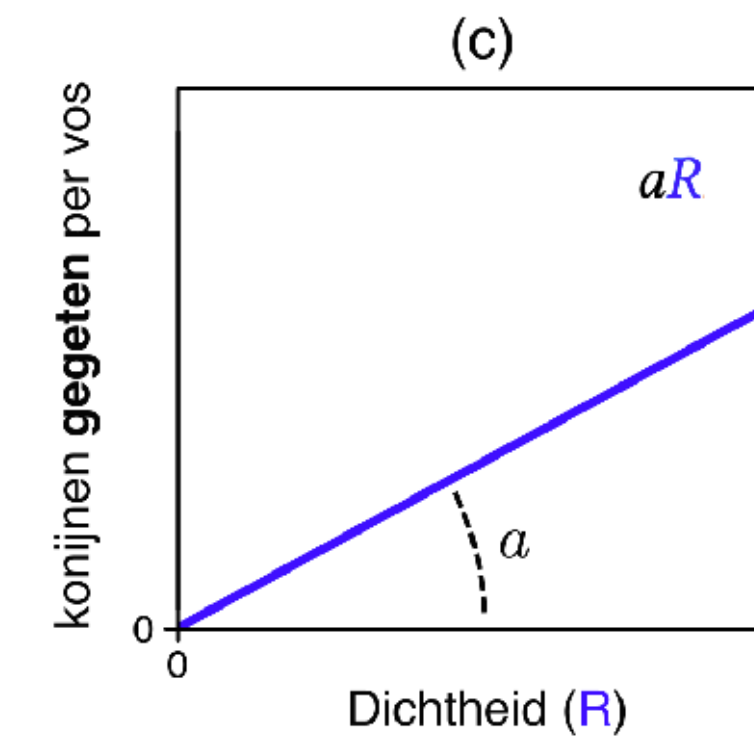
Laten we simpel beginnen: lineaire functies

$$\frac{dR}{dt} = bR \left(1 - \frac{R}{K}\right) -$$



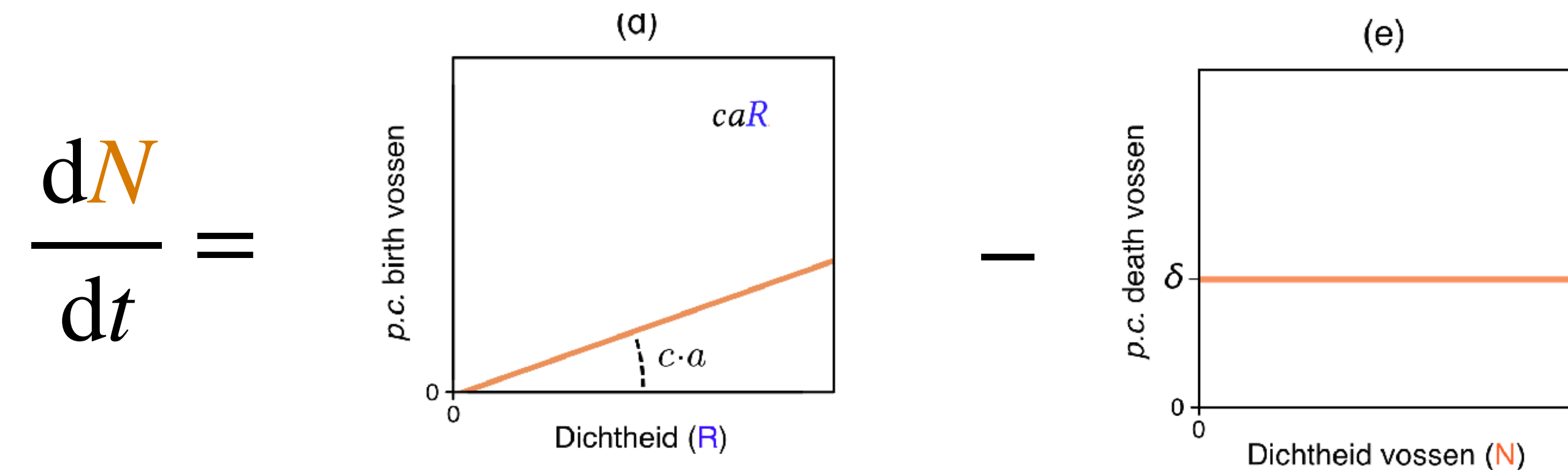
Laten we simpel beginnen: lineaire functies

$$\frac{dR}{dt} = bR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - dR -$$



Laten we simpel beginnen: lineaire functies

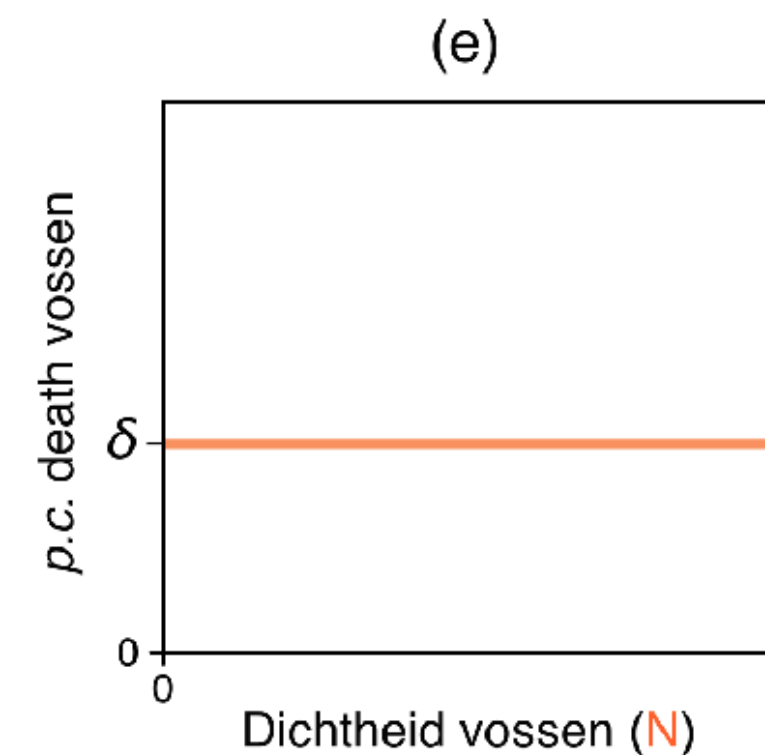
$$\frac{dR}{dt} = bR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - dR - aRN$$



Laten we simpel beginnen: lineaire functies

$$\frac{dR}{dt} = bR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - dR - aRN$$

$$\frac{dN}{dt} = caRN - \text{p.c. death vossen}$$

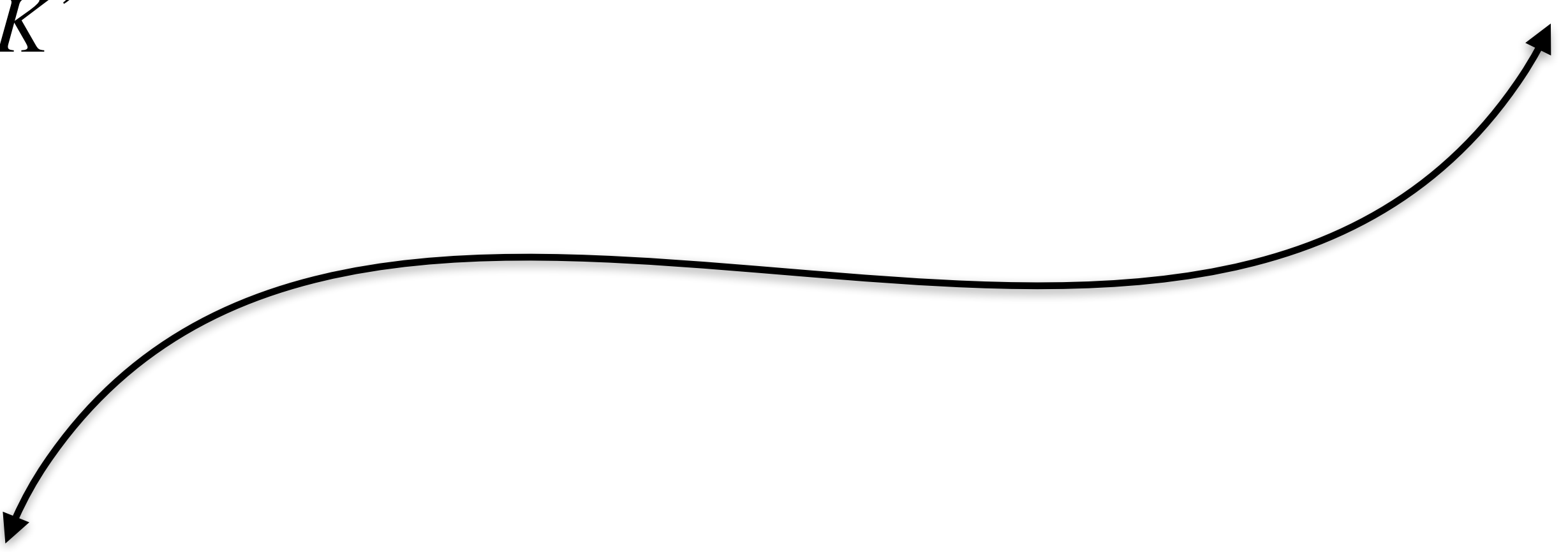


Laten we simpel beginnen: lineaire functies

$$\frac{dR}{dt} = \underbrace{bR\left(1 - \frac{R}{K}\right)}_{\text{max birth}} - dR - aRN$$

$$\frac{dN}{dt} = caRN - \delta N$$

Eindproduct: een gekoppeld (2D) systeem van ODEs

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= bR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - dR - aRN \\ \frac{dN}{dt} &= caRN - \delta N \end{aligned}$$


Voorbeeld van meer dan 2 gekoppelde vergelijkingen

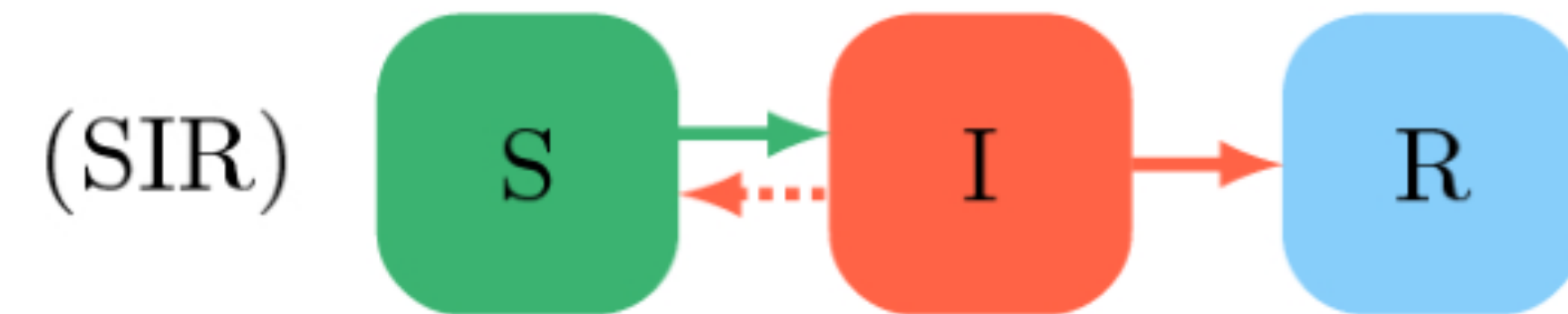
SIR-modellen

$$N = S + I + R$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)S - dS - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \delta)I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - dR$$



Voorbeeld van meer dan 2 gekoppelde vergelijkingen

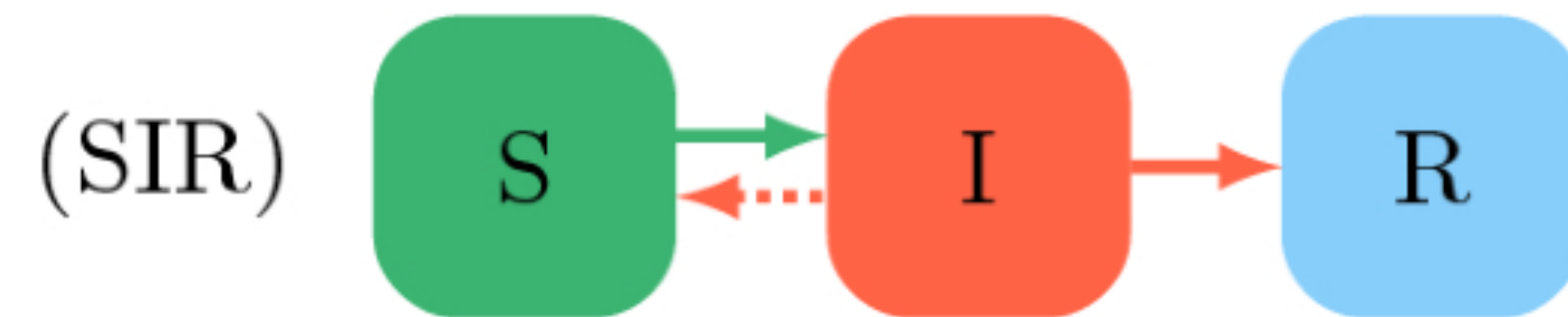
SIR-modellen

$$N = S + I + R$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)S - dS - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \delta)I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - dR$$



Voorbeeld van meer dan 2 gekoppelde vergelijkingen

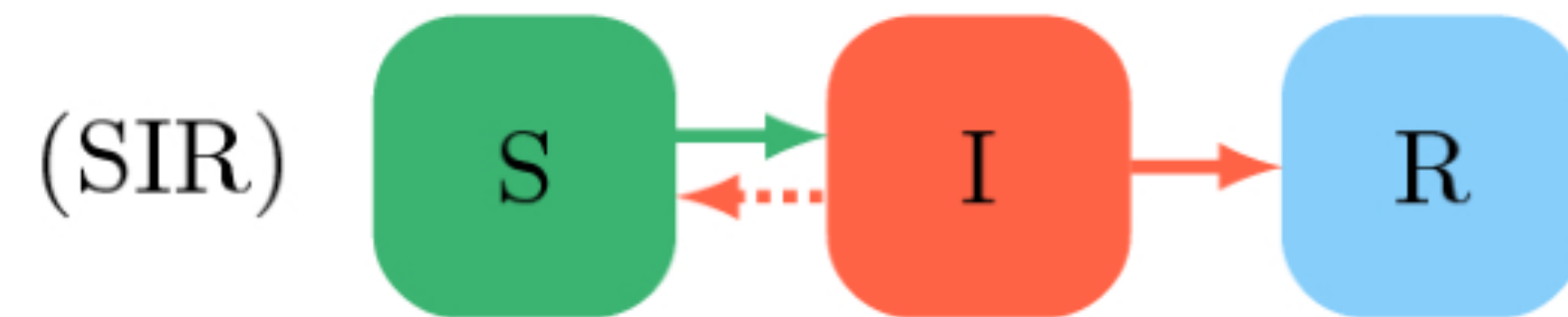
SIR-modellen

$$N = S + I + R$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)S - dS - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \delta)I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - dR$$



Voorbeeld van meer dan 2 gekoppelde vergelijkingen

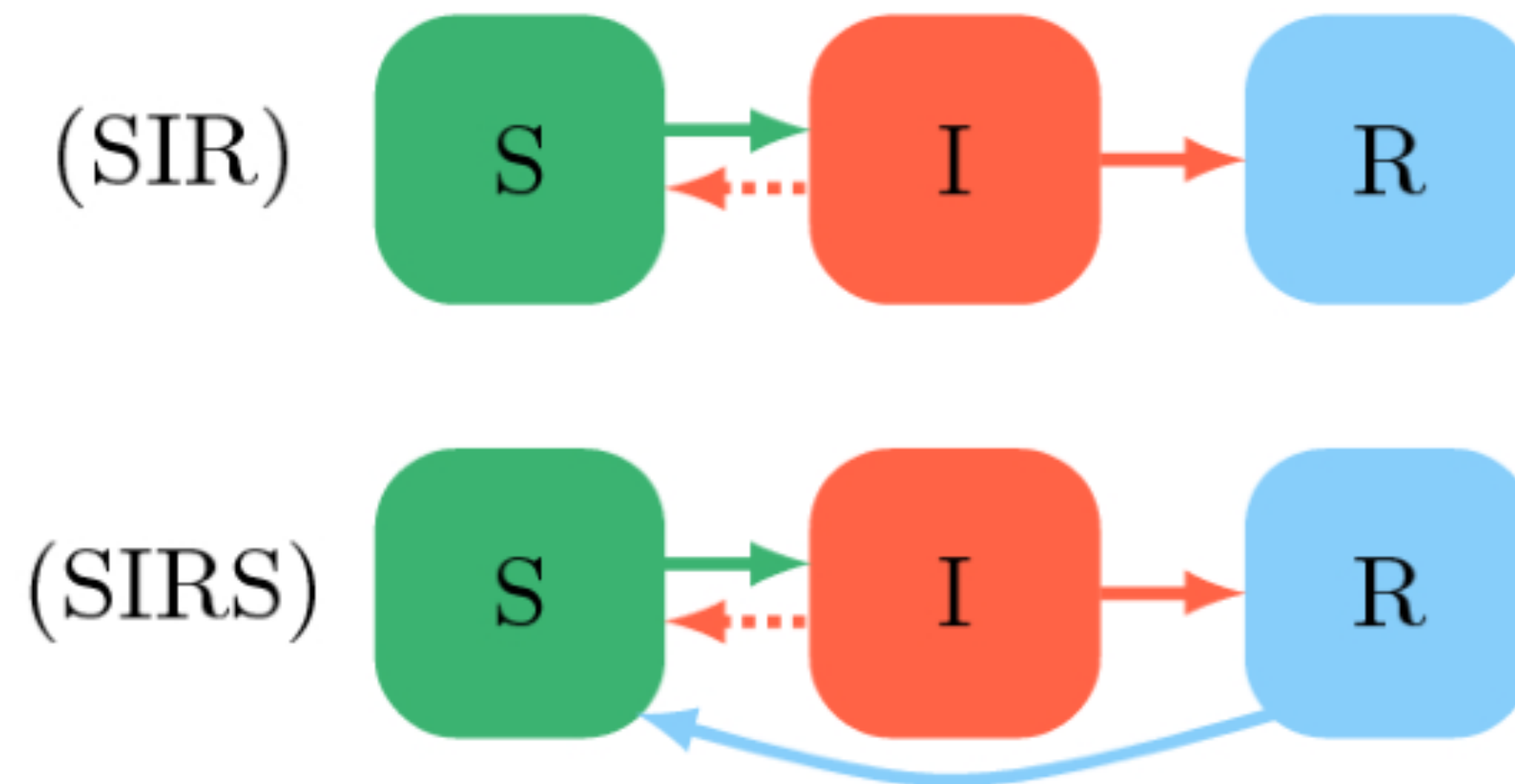
SIR-modellen

$$N = S + I + R$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)S - dS - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \delta)I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - dR$$



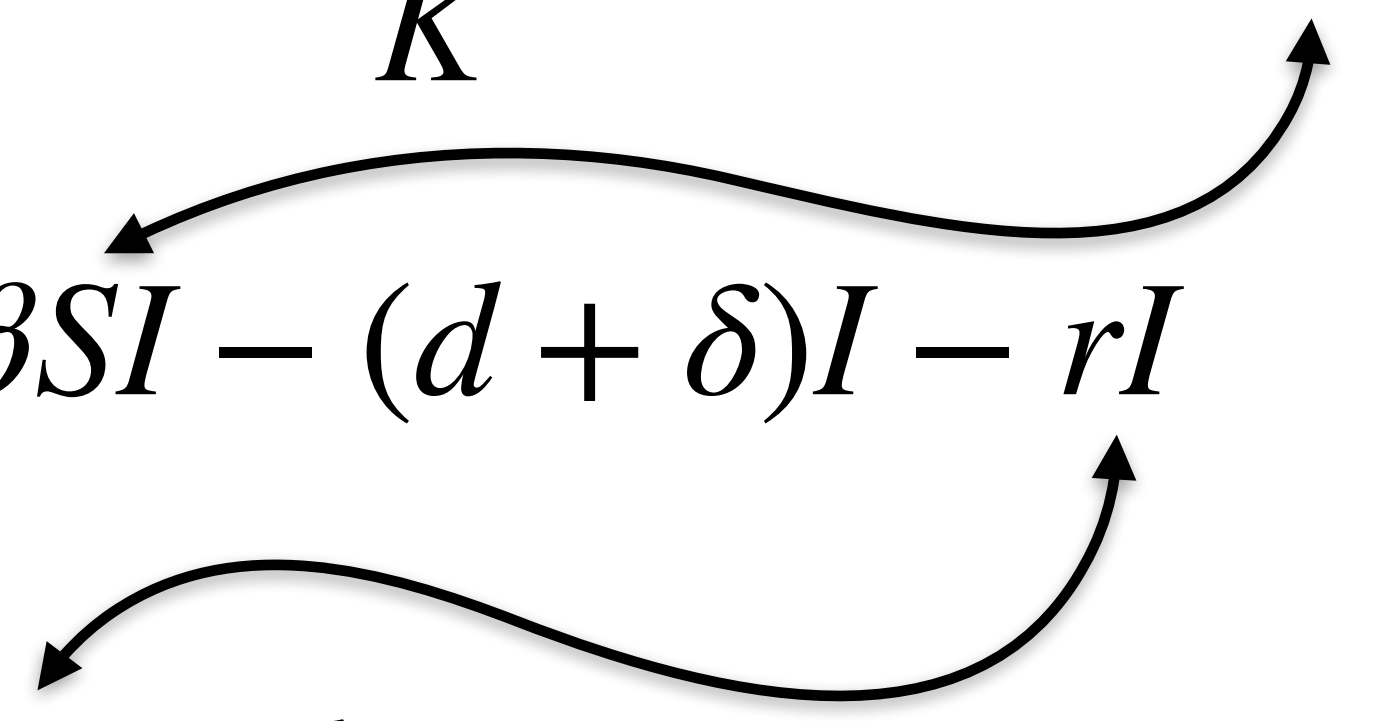
Voorbeeld van meer dan 2 gekoppelde vergelijkingen

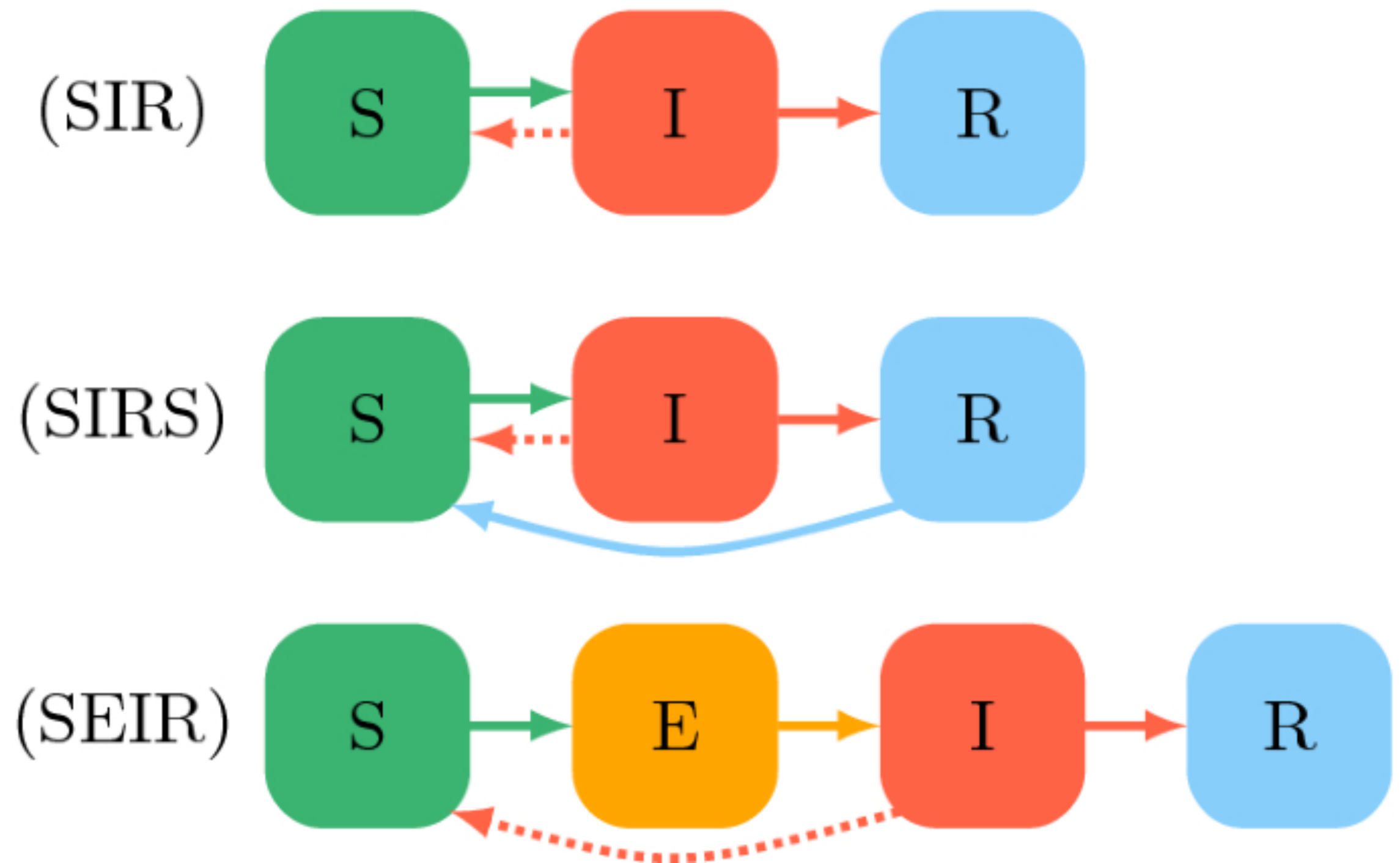
SIR-modellen

$$N = S + I + R$$

$$\frac{dS}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)S - dS - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \delta)I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - dR$$




Beroemde ODEs voor predator-proof interacties

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}} \\ \frac{dN}{dt} &= \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}\end{aligned}$$

Beroemde ODEs voor predator-prooi interacties

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}} \\ \frac{dN}{dt} &= \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}\end{aligned}$$

Dit heet het Lotka-Volterra predator-prooi model

Wanneer is er een evenwicht?

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}} \\ \frac{dN}{dt} &= \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}\end{aligned}$$

Wanneer is er een evenwicht?

$$= \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K} \right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}}$$

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}$$

Wanneer is er een evenwicht?

$$0 = \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}}$$

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}$$

Wanneer is er een evenwicht?

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}} \\ &= \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}} \end{aligned}$$

Wanneer is er een evenwicht?

$$0 = \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}}$$

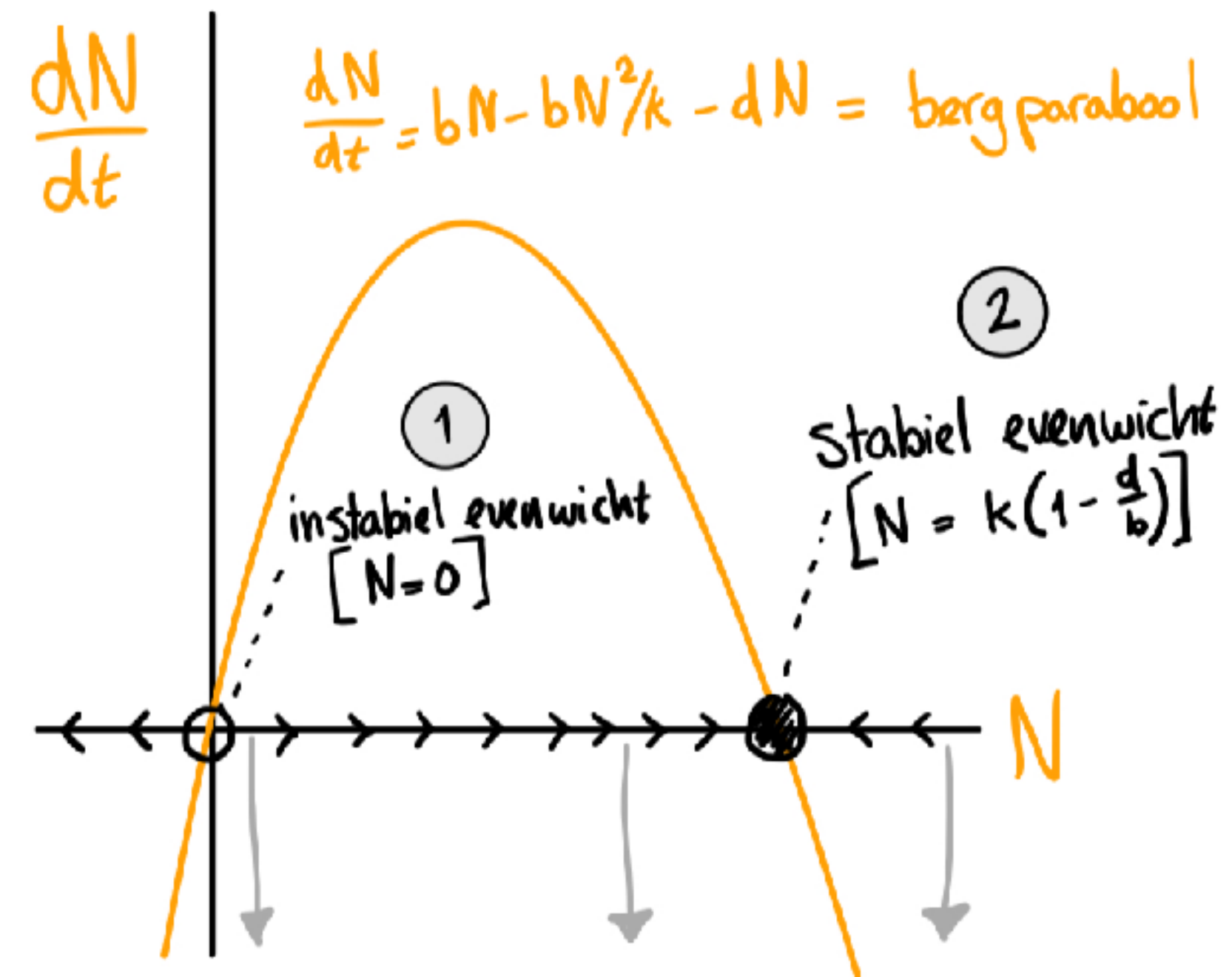
$$0 = \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}$$

$$1 - x - y = 0$$

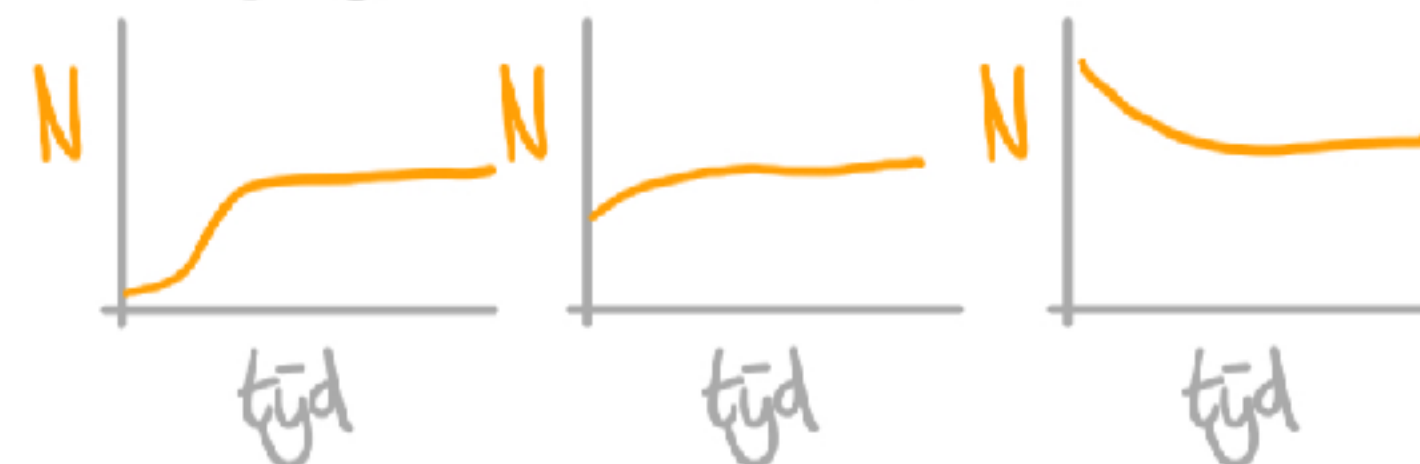
$$x = 1 - y$$

$$y = 1 - x$$

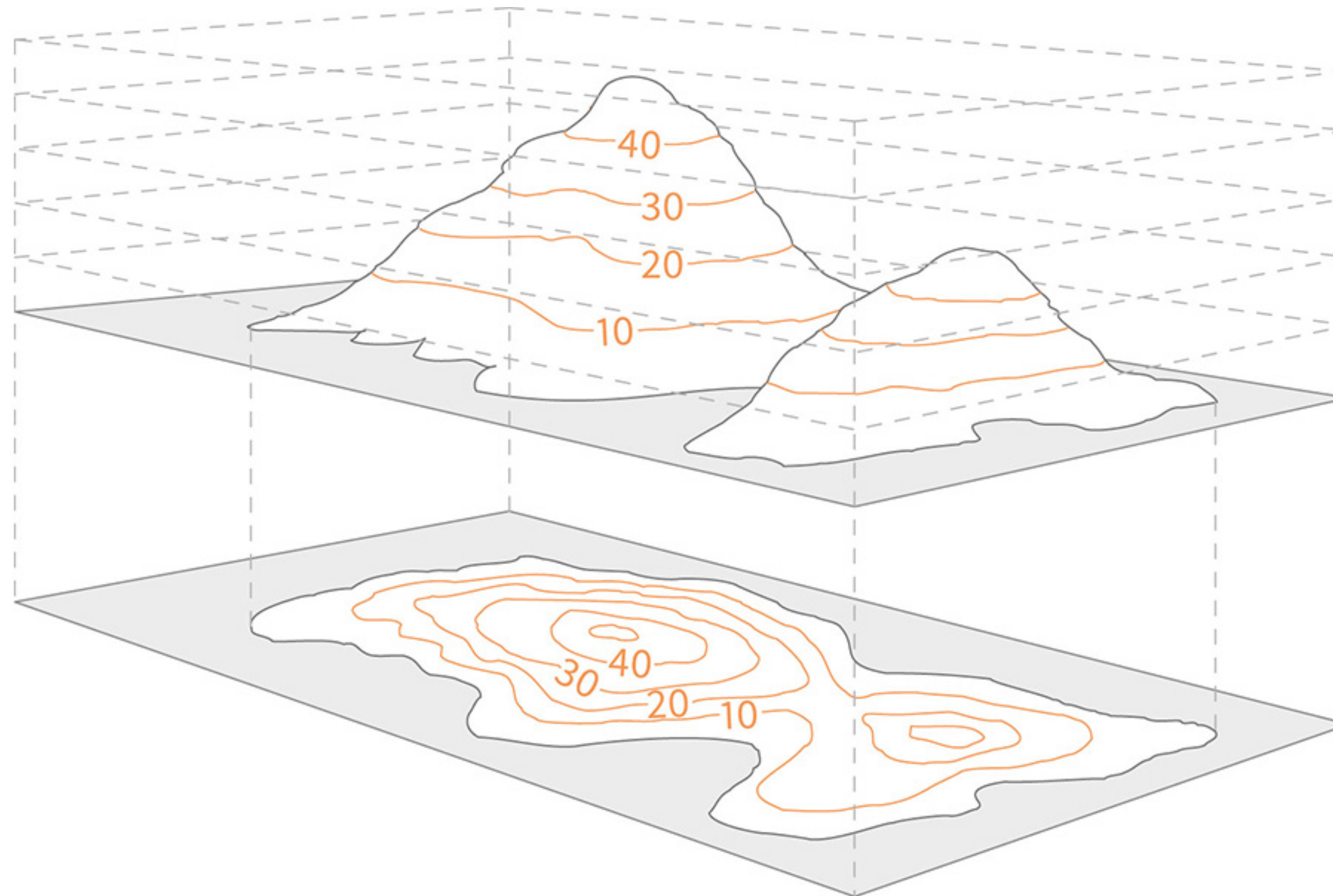
We kennen het faseportret al...



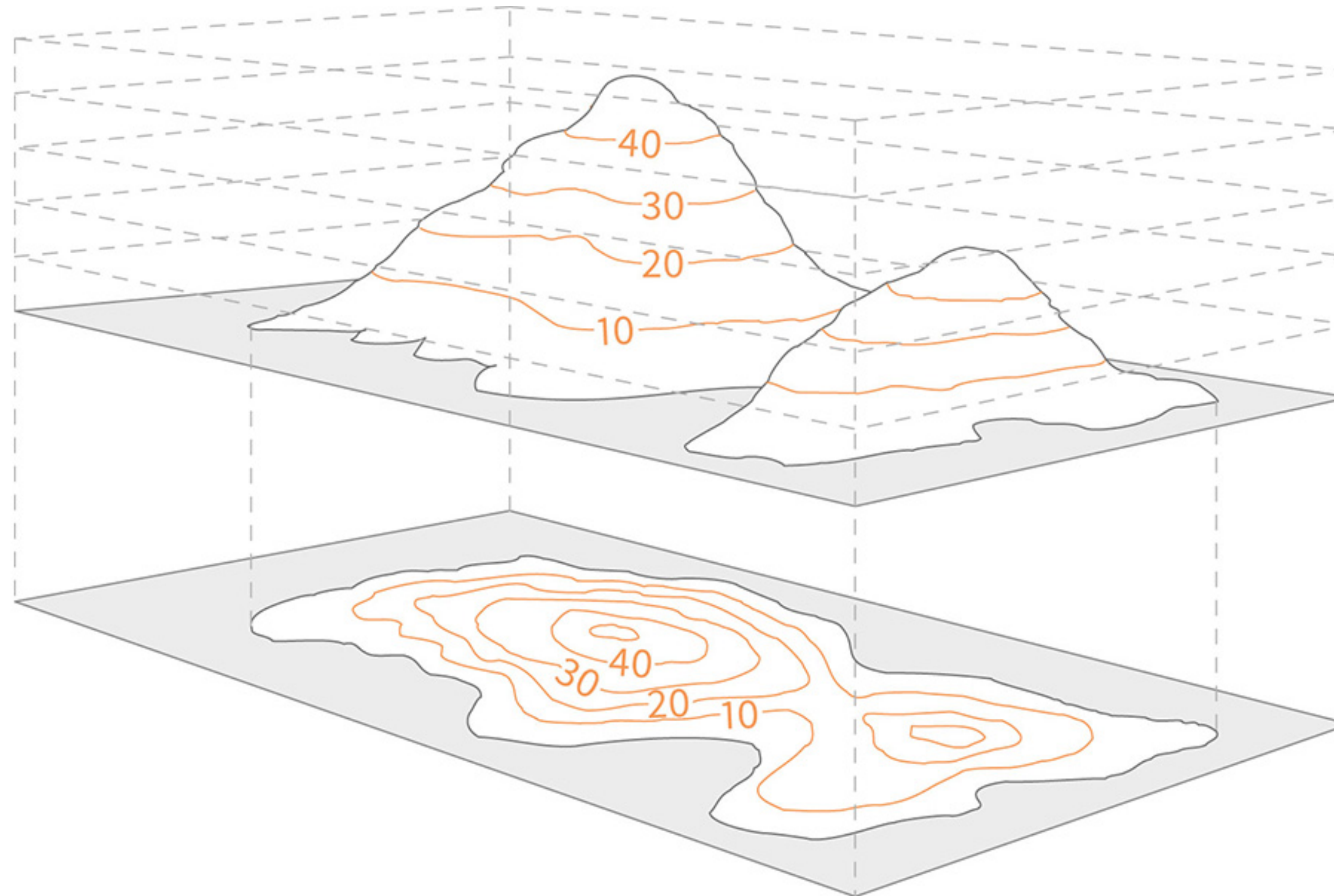
Mogelijke oplossingen:



Wat gebeurt er met onze hoogte als we langs een hoogtelijn lopen?



Wat gebeurt er met onze hoogte als we langs een hoogtelijn lopen?



En wat als we juist haaks op de hoogtelijnen lopen?

Dit is Joey



Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

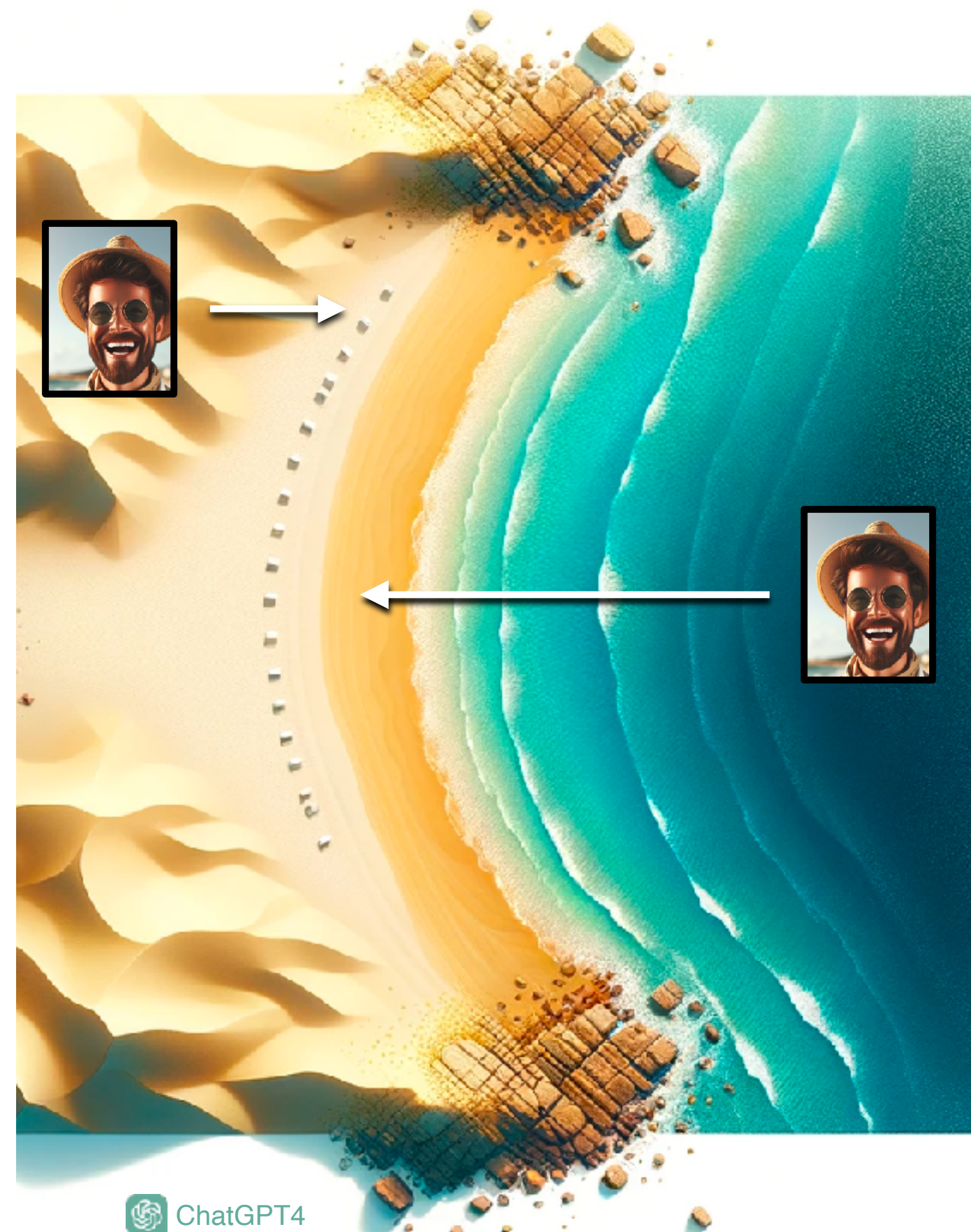
Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

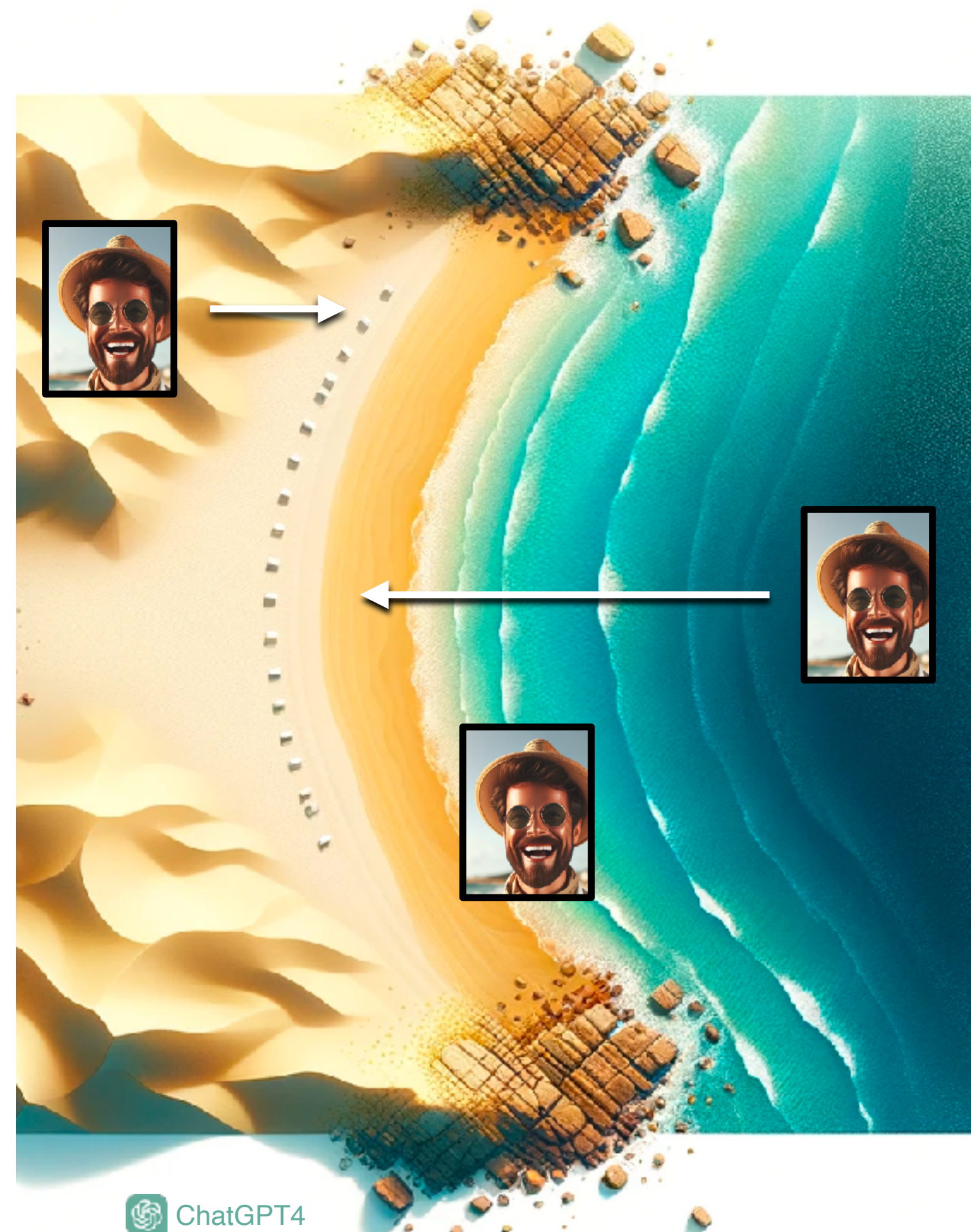
Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

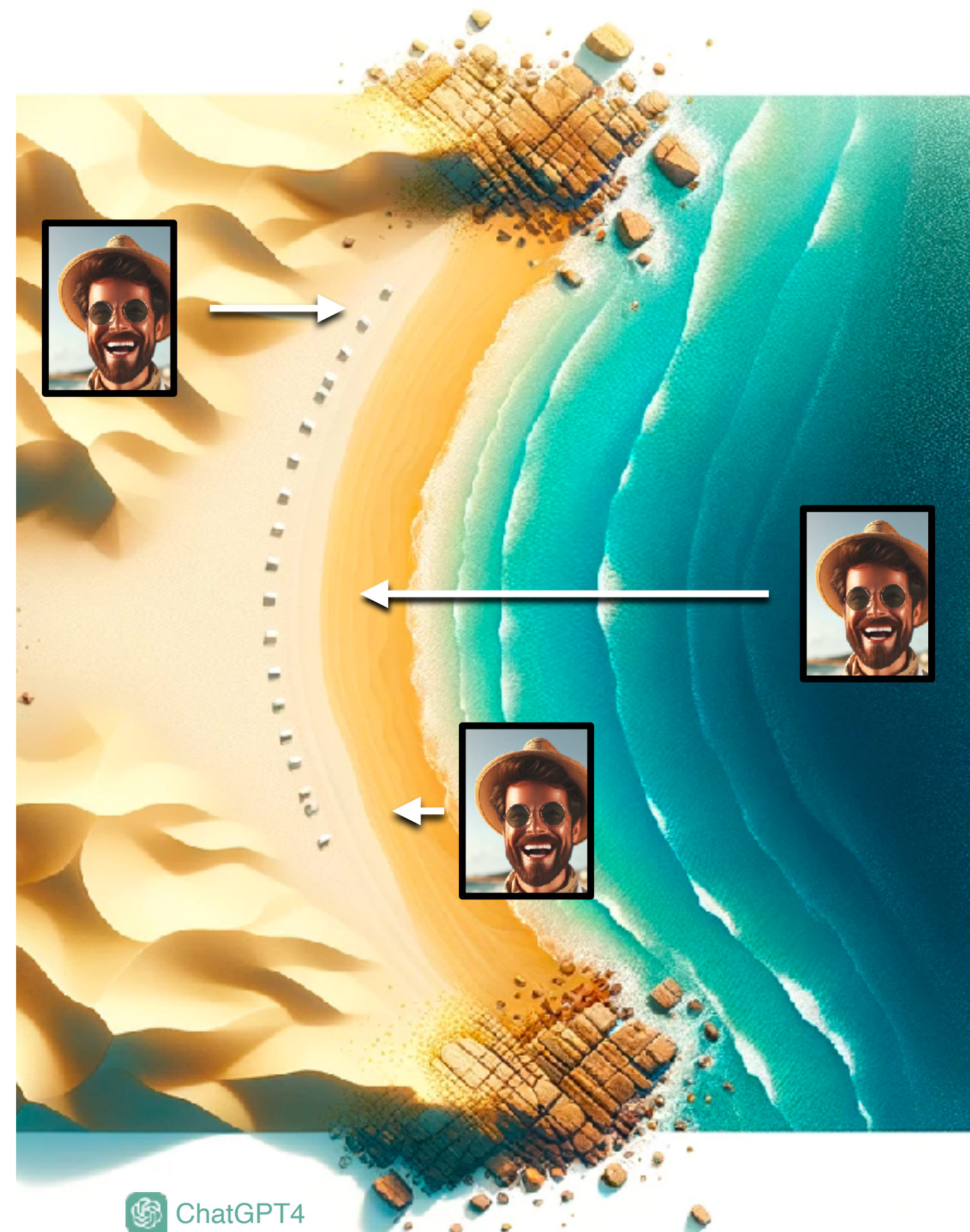
Joey houdt niet van **water en duinen**



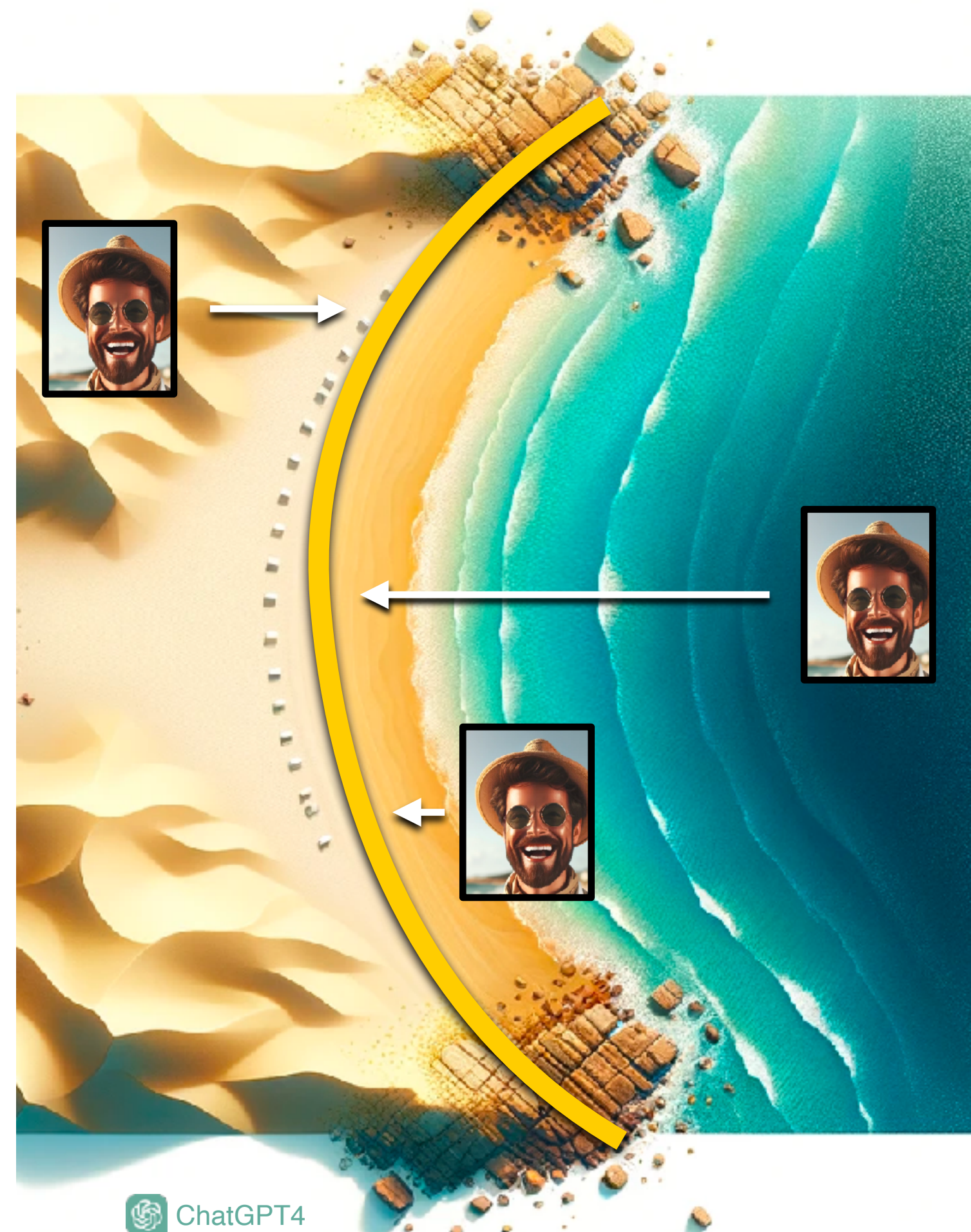
Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

Joey houdt niet van **water en duinen**

 ChatGPT4 ChatGPT4

Joey houdt niet van **water en duinen**



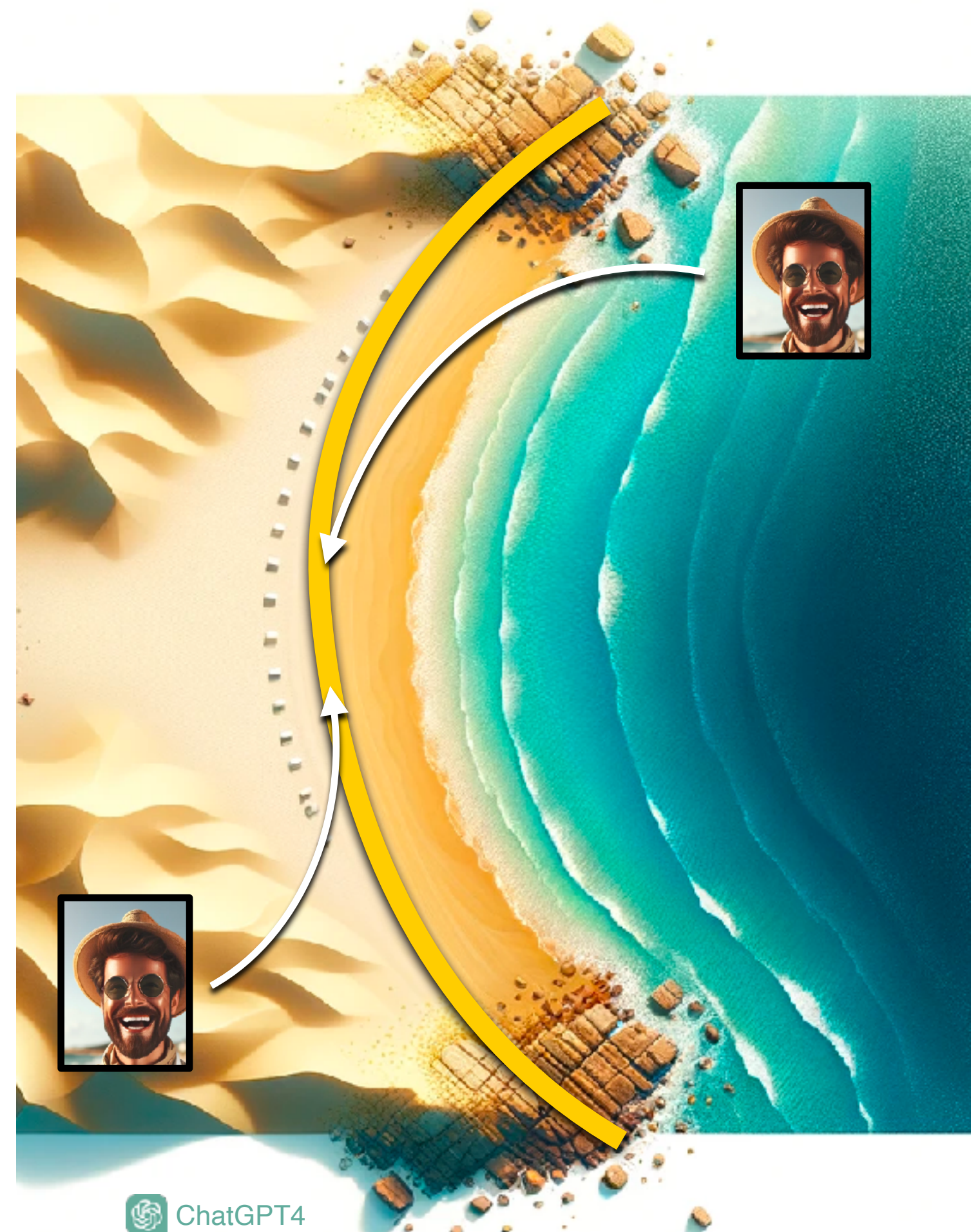
Joey houdt ook niet van **rotsen**



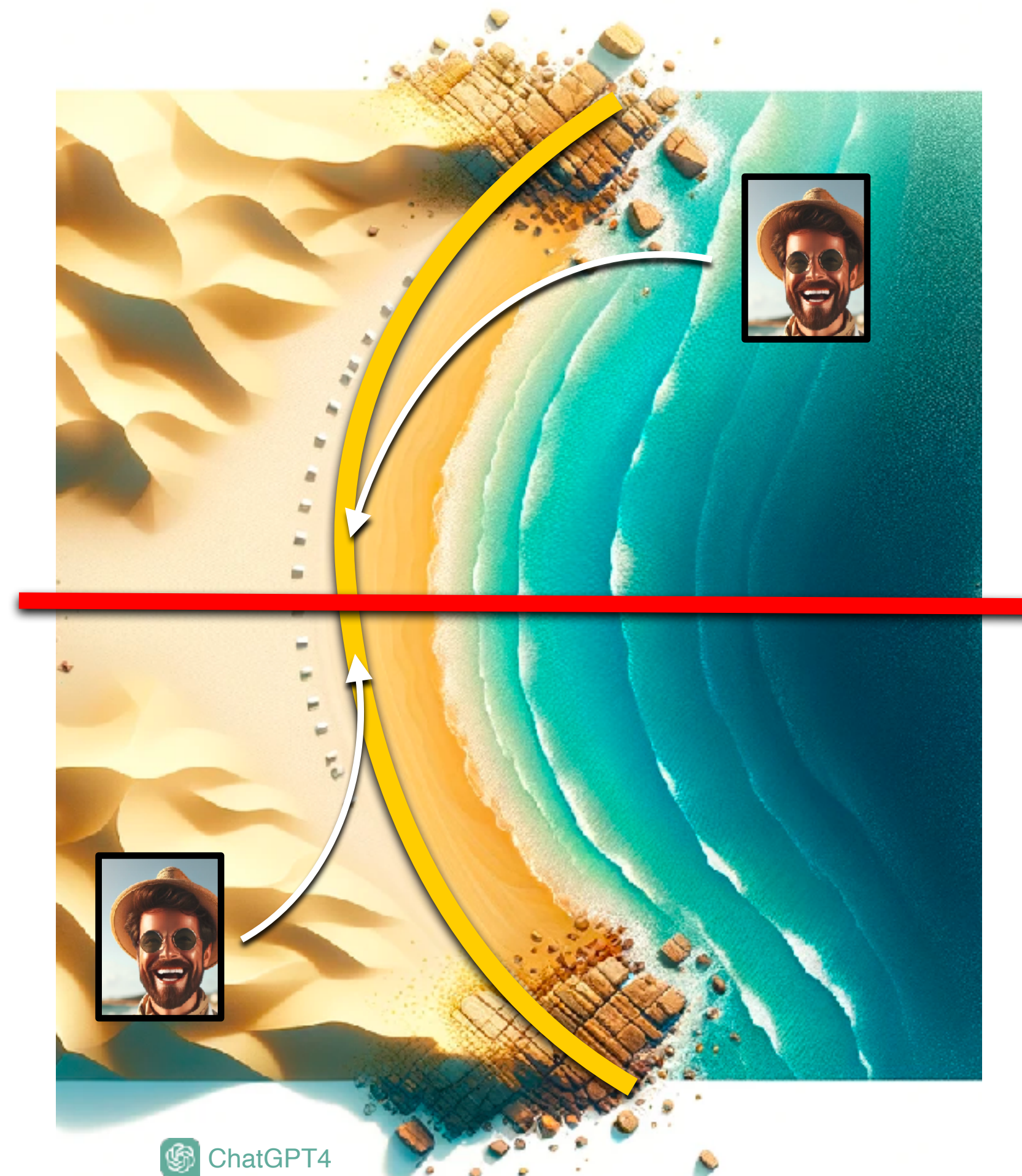
Joey houdt ook niet van **rotsen**



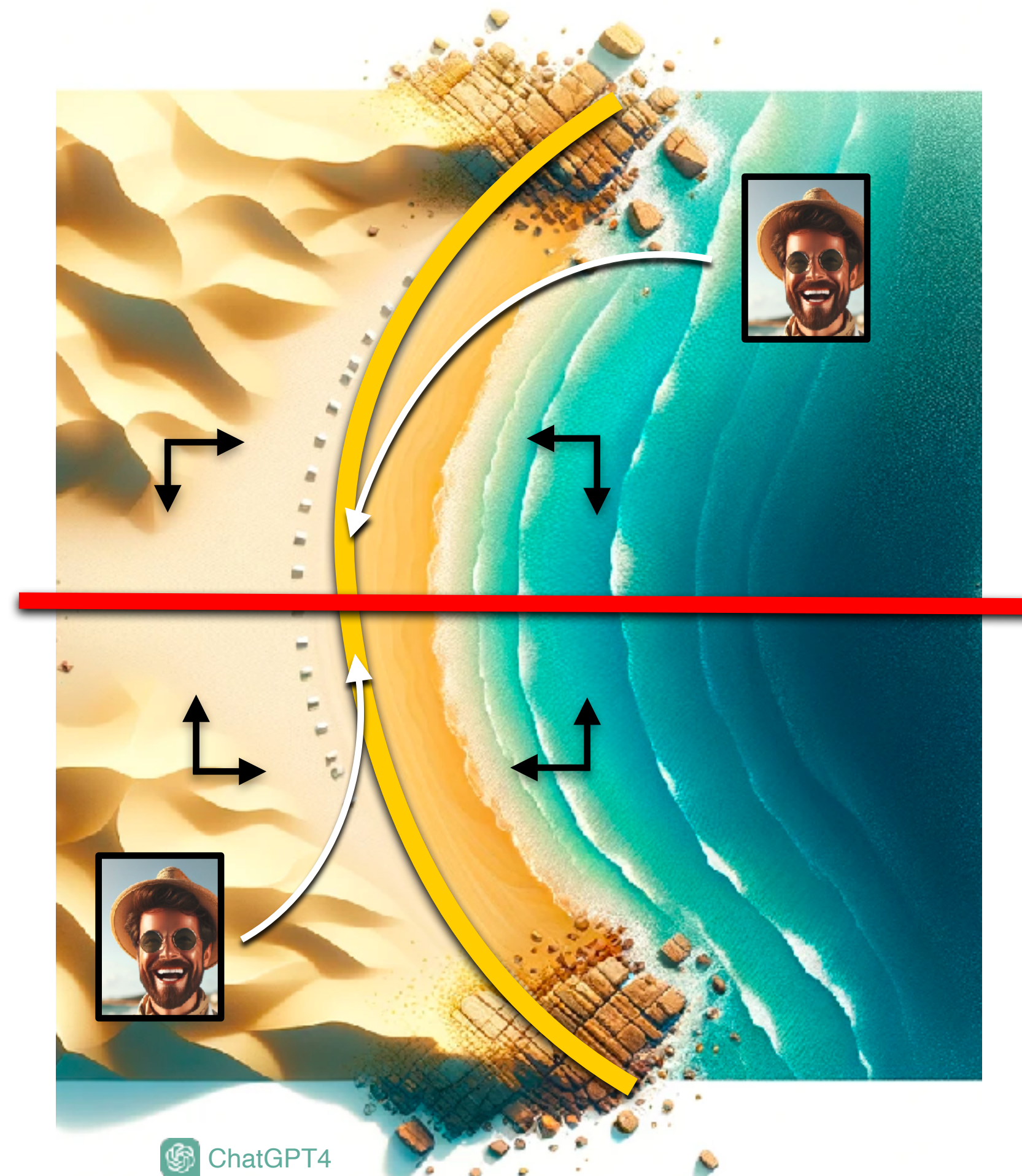
Joey houdt ook niet van **rotsen**



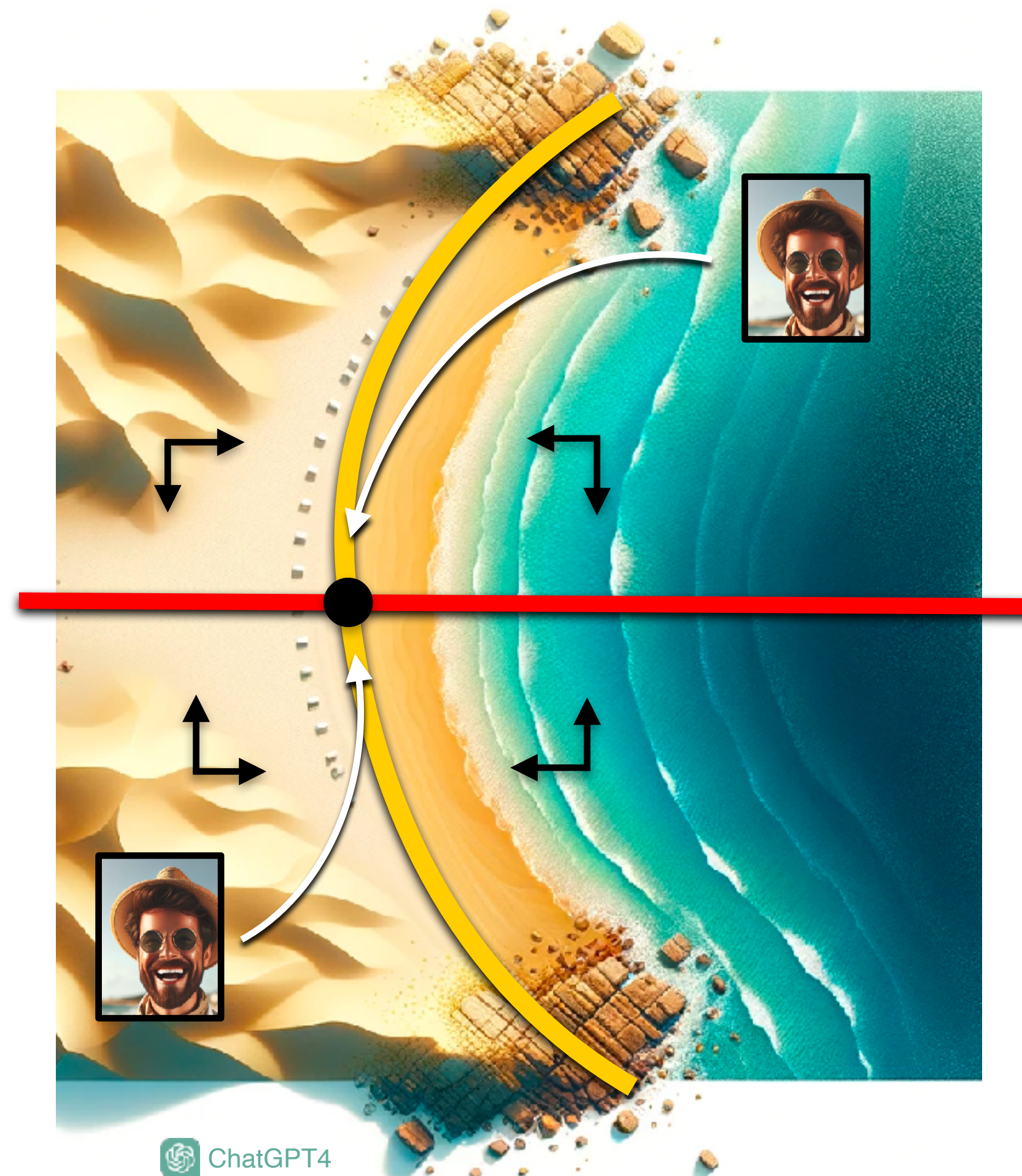
Joey houdt ook niet van **rotsen**



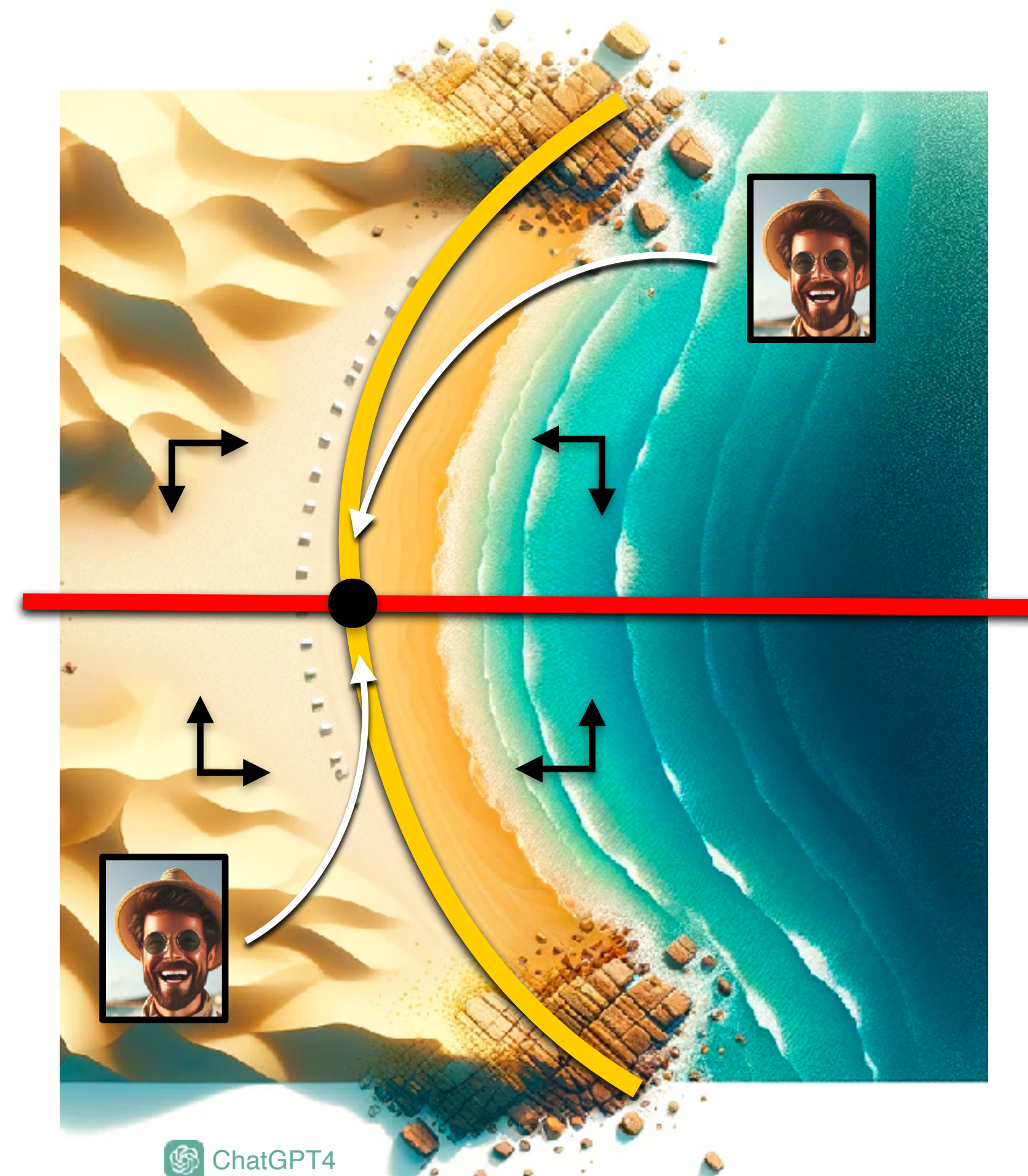
Joey houdt ook niet van **rotsen**

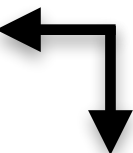


Joey houdt ook niet van **rotsen**

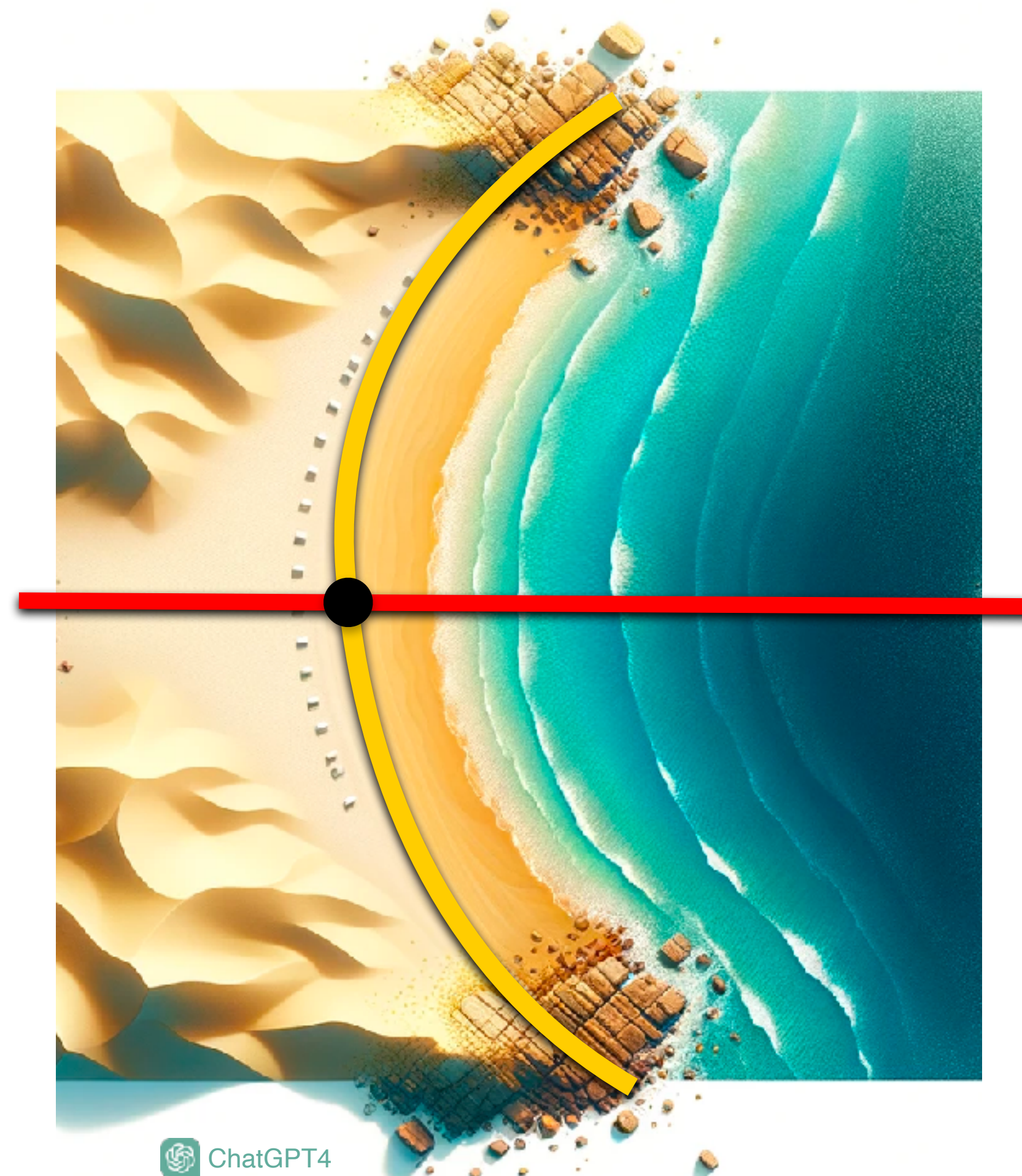


Joey houdt ook niet van **rotsen**



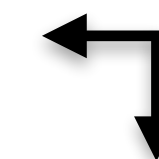
-  Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de horizontale richting
-  Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de verticale richting
-  Geeft Joey's voorkeursrichting aan
-  Stabiel punt: hier verplaatst Joey niet meer

Joey met net iets andere voorkeuren



Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **verticale** richting

Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **horizontale** richting

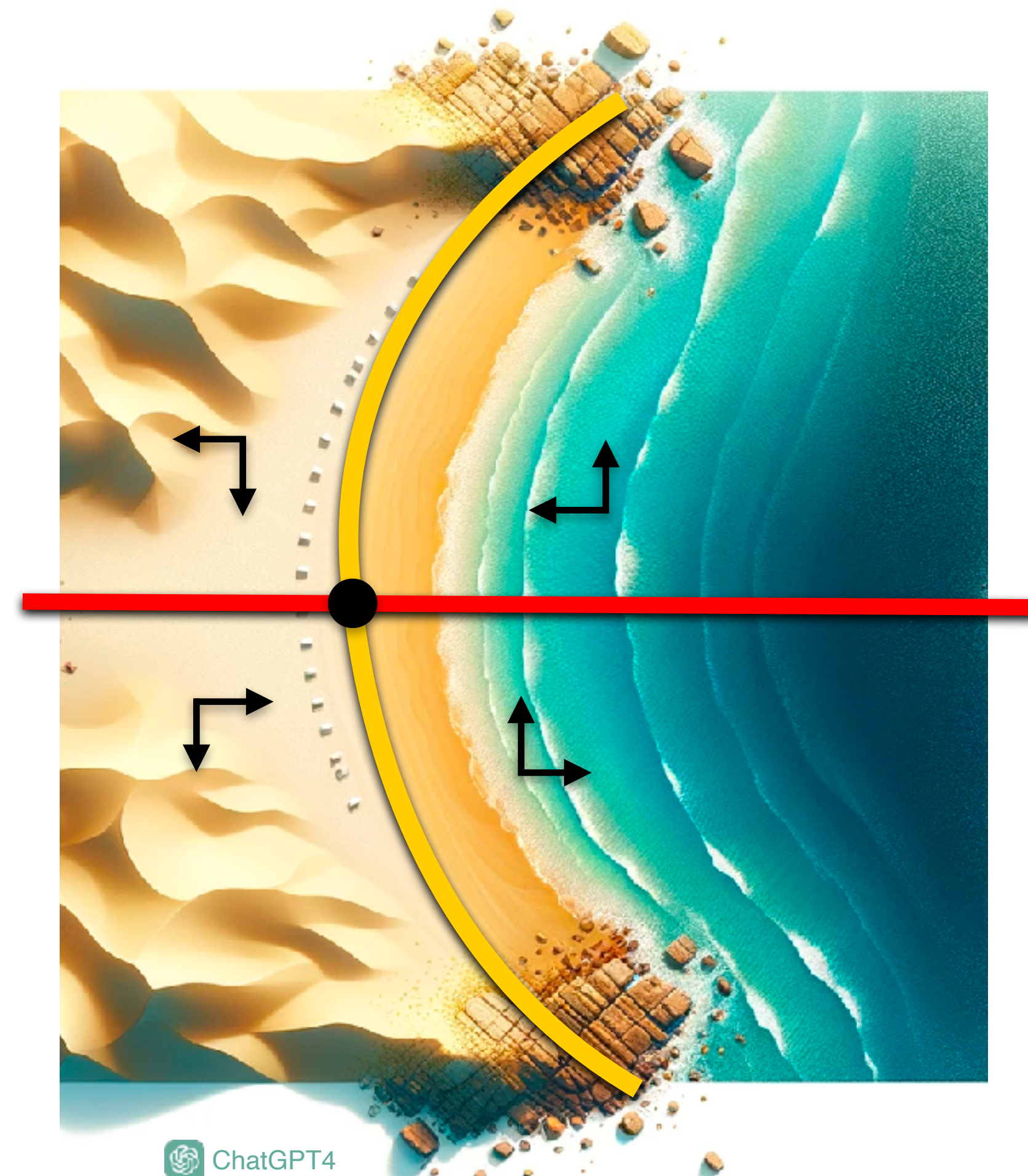


Geeft Joey's voorkeursrichting aan



Stabiel punt: hier verplaatst Joey niet meer

Joey met net iets andere voorkeuren



Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **verticale** richting

Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **horizontale** richting

Geeft Joey's voorkeursrichting aan

Stabiel punt: hier verplaatst Joey niet meer

Joey met net iets andere voorkeuren



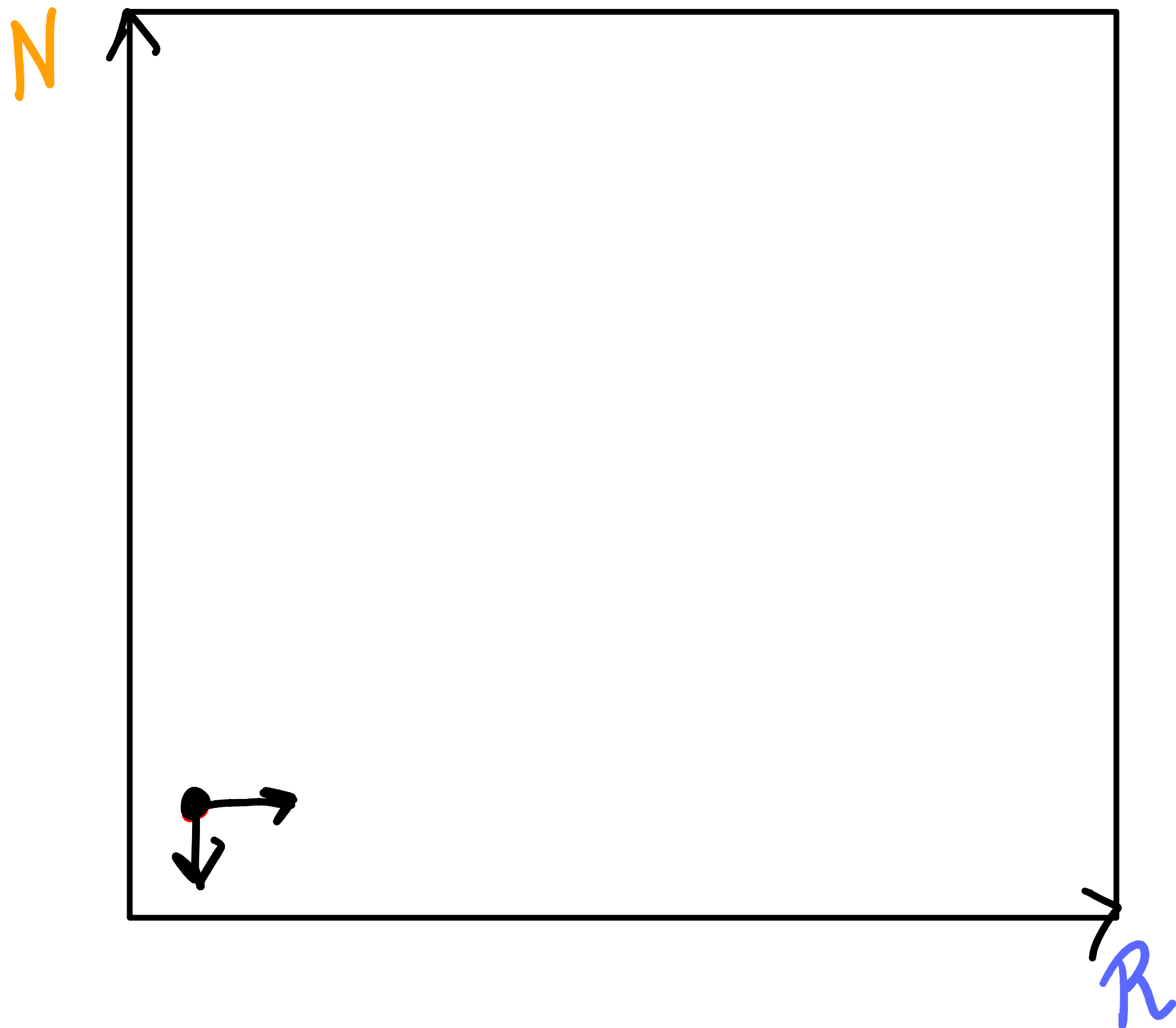
Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **verticale** richting

Als Joey hier overheen gaat, draait hij in de **horizontale** richting

Geeft Joey's voorkeursrichting aan

Stabiel punt: hier verplaatst Joey niet meer

Voor 2 ODEs: een “faseruimte”

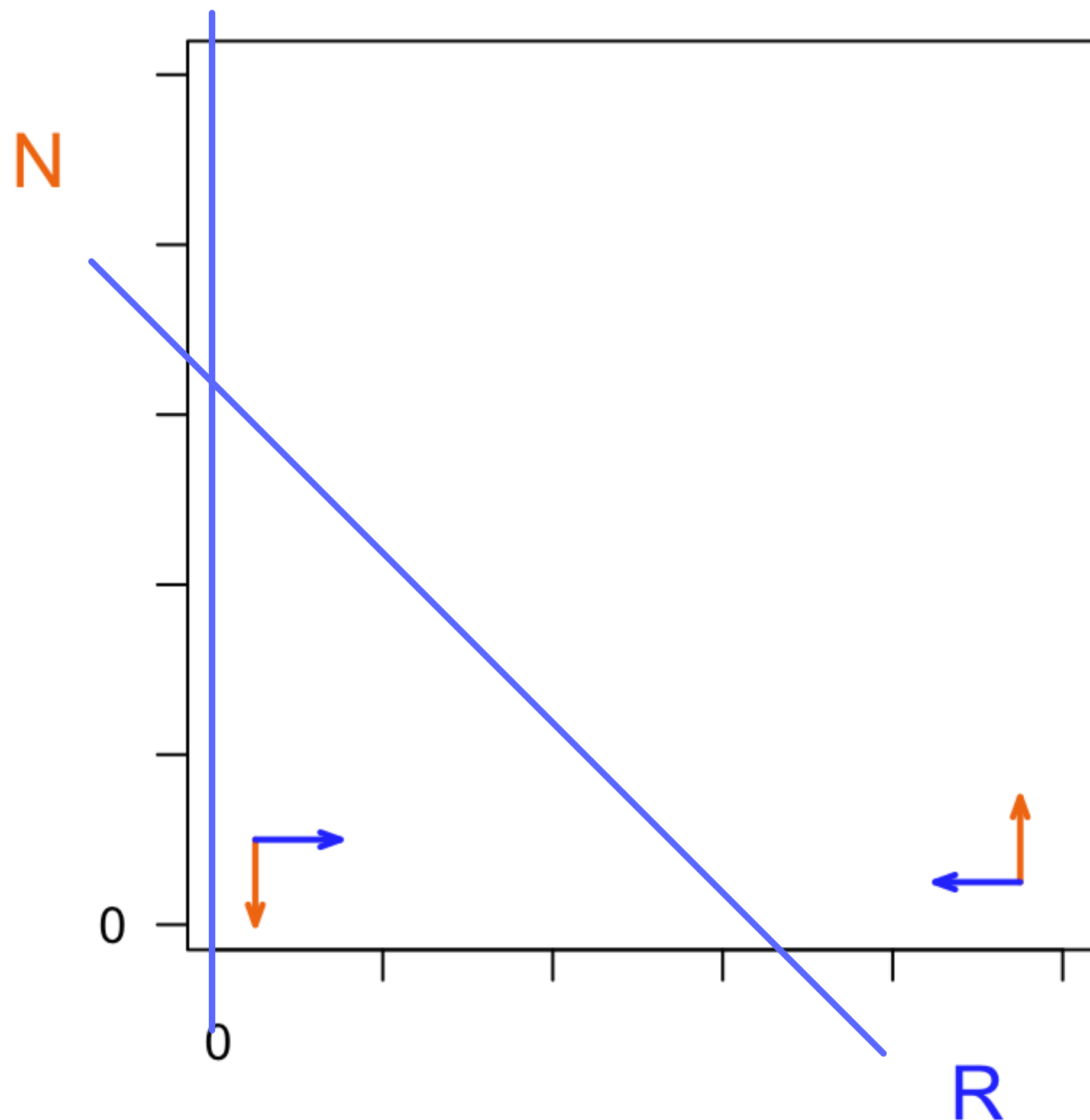


$$\frac{dR}{dt} = bR - dR$$

$$\frac{dR}{dt} = \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\delta N$$

Ergens tussen “weinig konijnen” en “veel konijnen” zijn de pijltjes dus omgedraaid...



$$\frac{dR}{dt} = \underbrace{b \left(1 - \frac{R}{K}\right) R}_{\text{geboorte konijnen}} - \underbrace{dR}_{\text{sterfte konijnen}} - \underbrace{aRN}_{\text{predatie}}$$

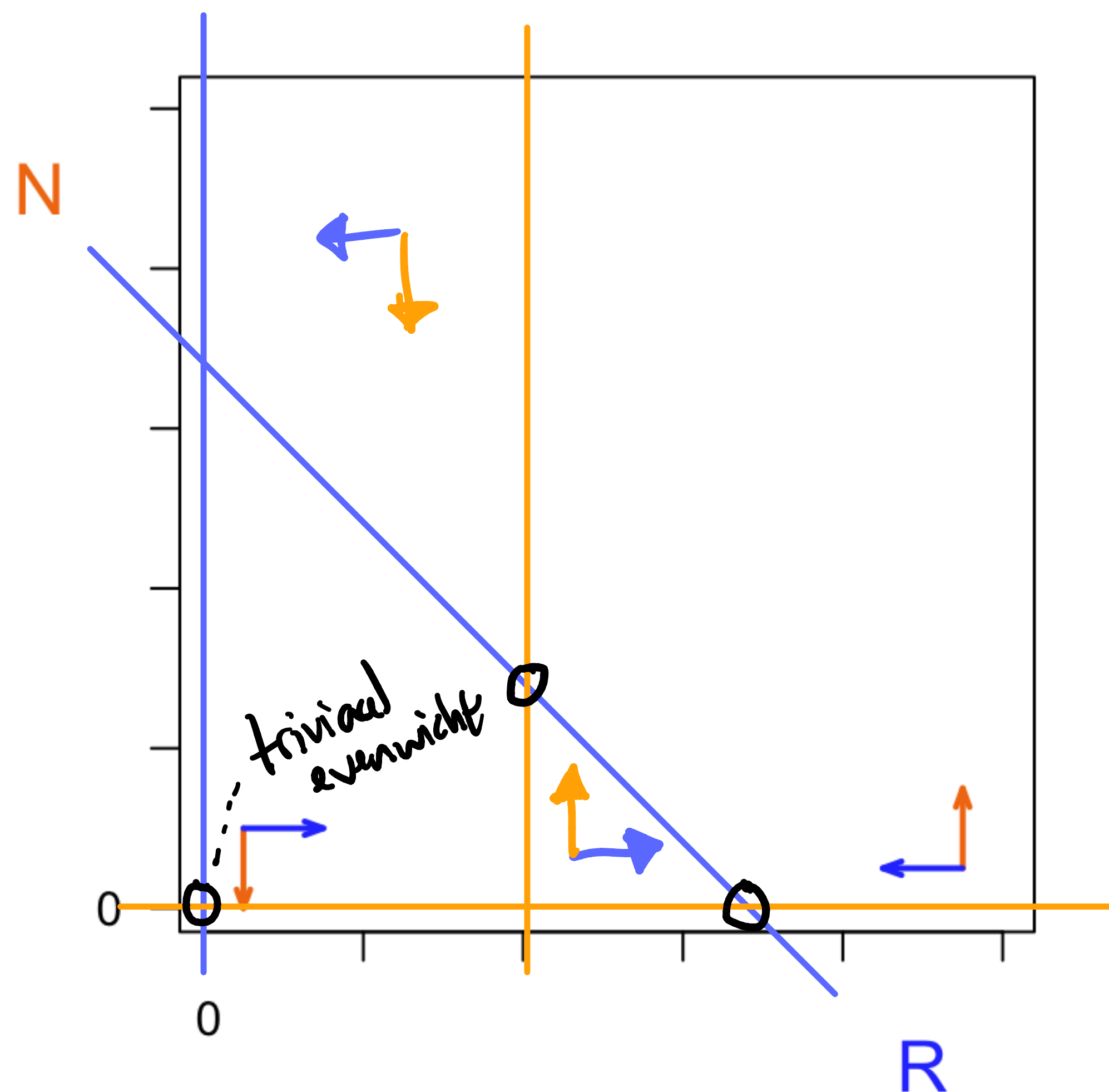
$$0 = R \left(b \left(1 - \frac{R}{K}\right) - d - aN \right)$$

$$R = 0$$

$$b \left(1 - \frac{R}{K}\right) - d = aN$$

$$N = \frac{1}{a} \left(b \left(1 - \frac{R}{K}\right) - d \right) \quad V = f(x)$$

Ook de vossen (N) hebben *nullclines*



$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{caRN}_{\text{geboorte vossen}} - \underbrace{\delta N}_{\text{sterfte vossen}}$$

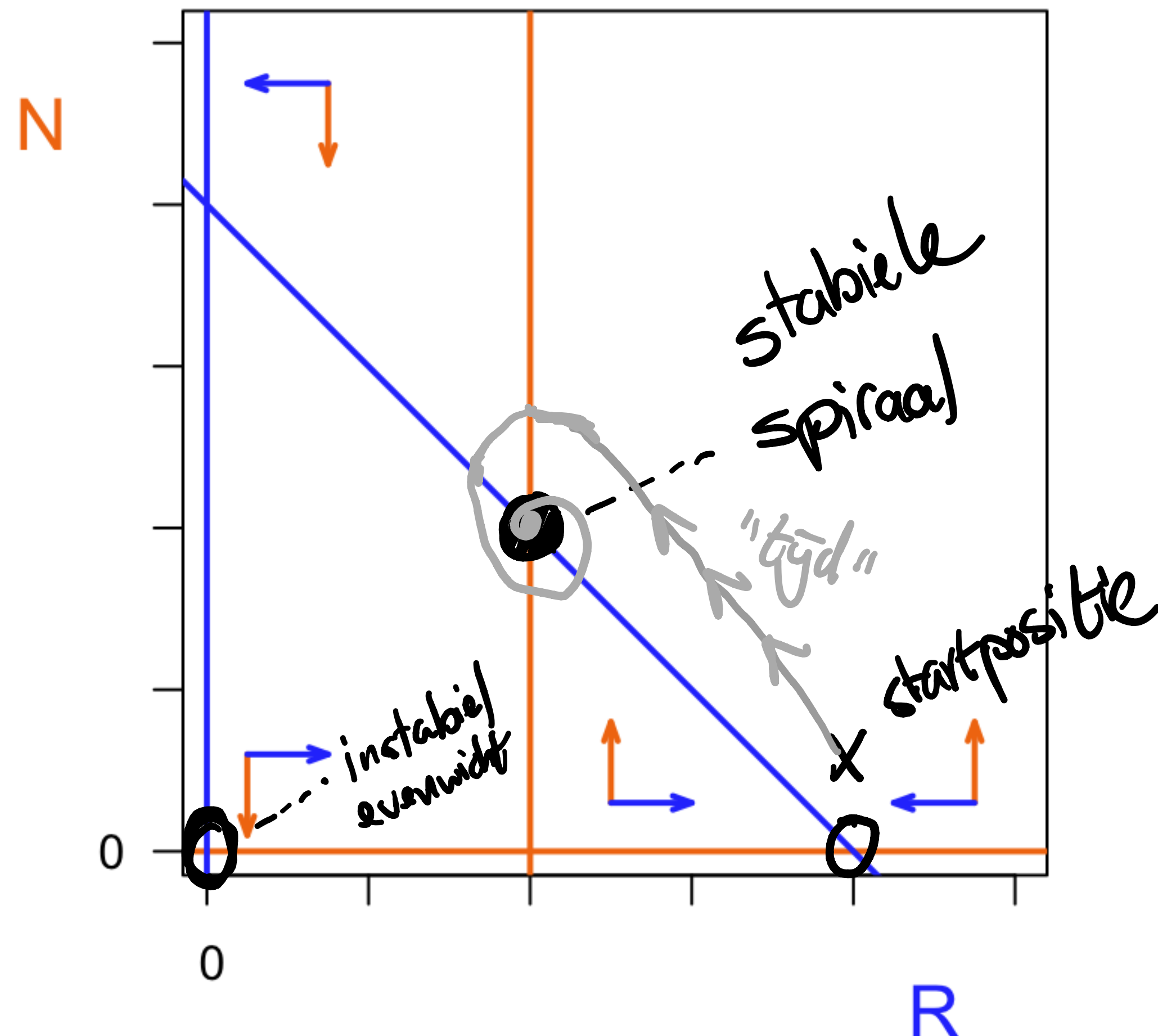
$$0 = caRN - \delta N \rightarrow N(caR - \delta)$$

$$N = 0$$

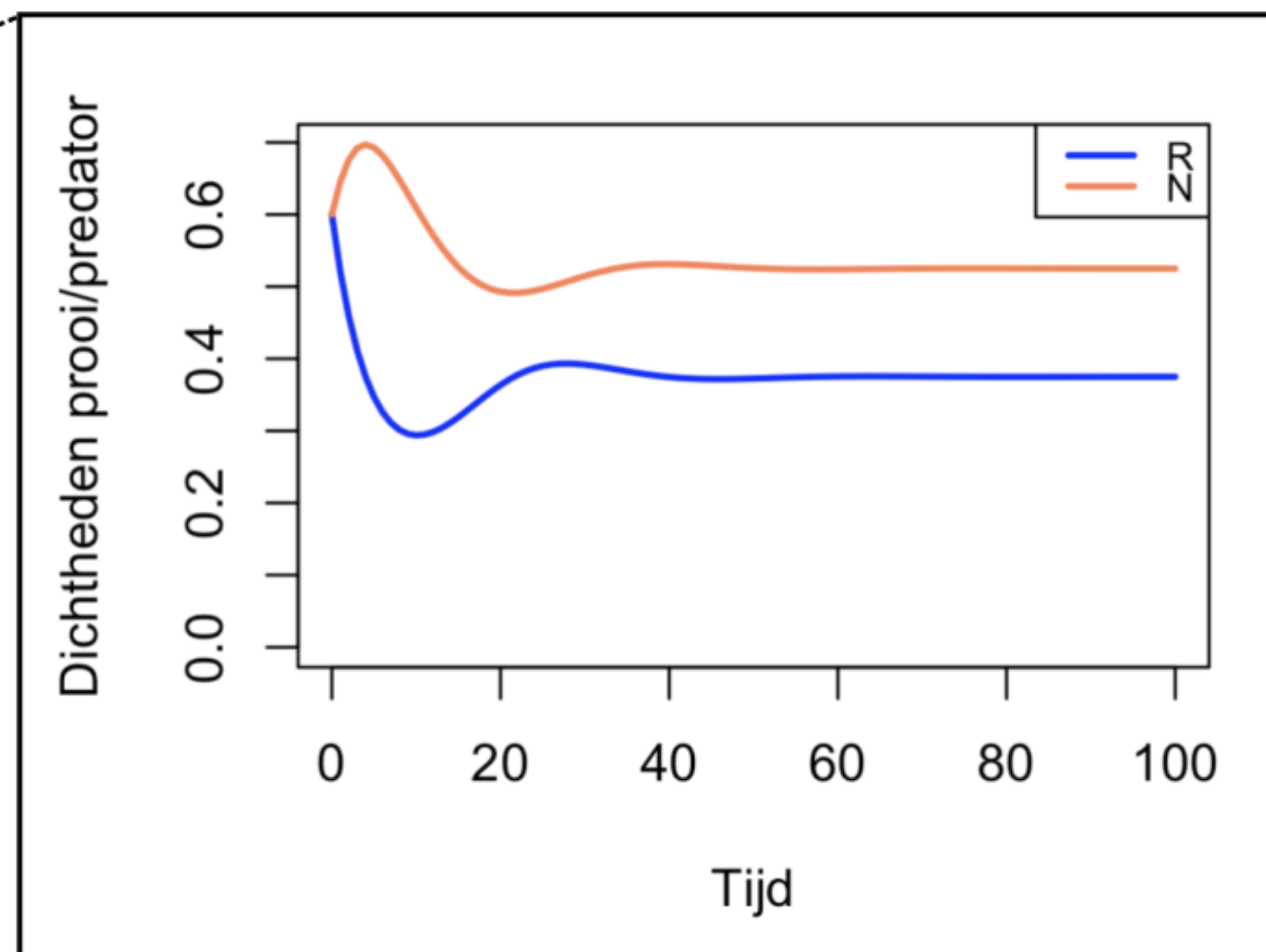
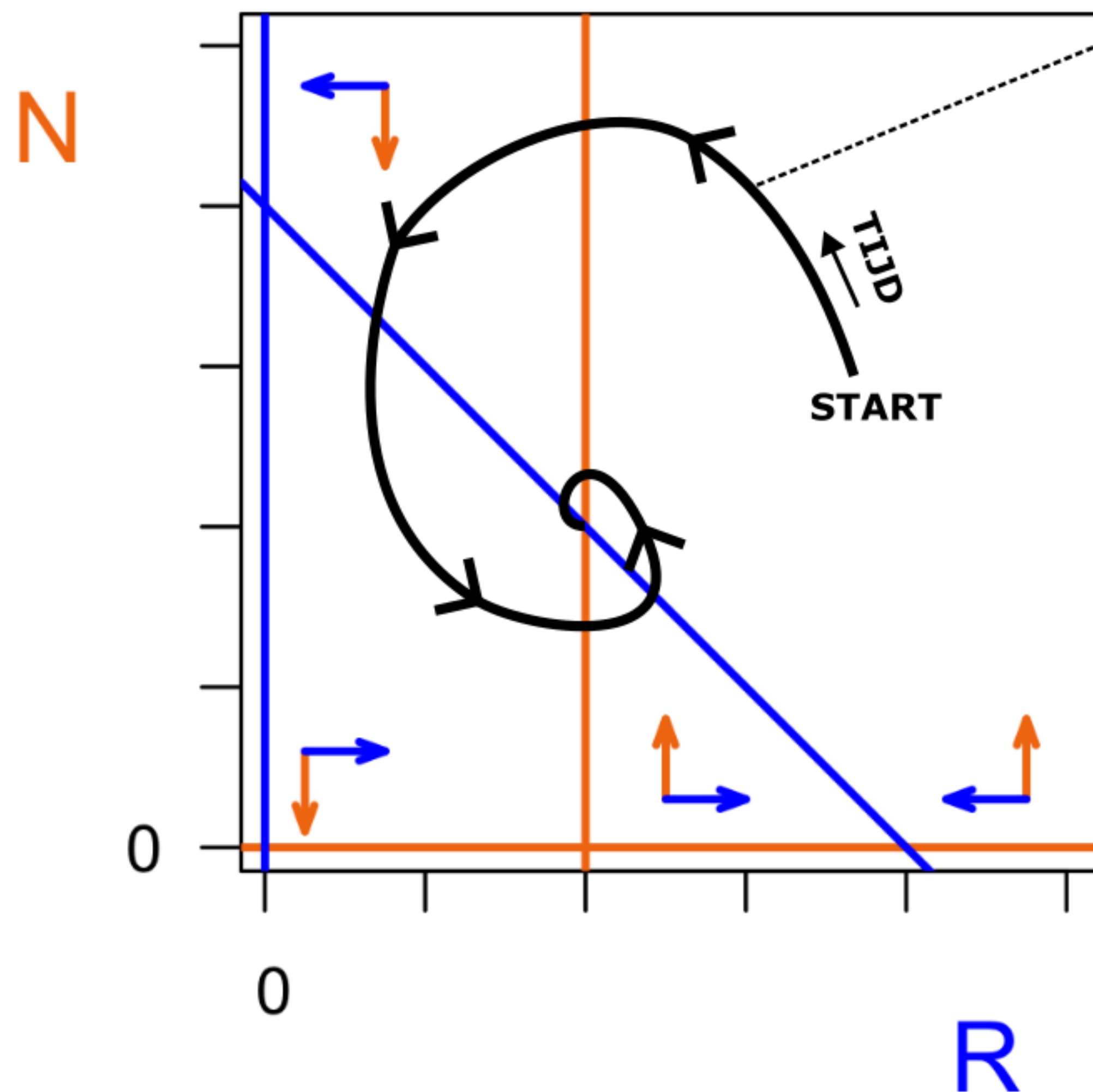
$$caR - \delta = 0 \rightarrow caR = \delta$$

$$R = \frac{\delta}{ca}$$

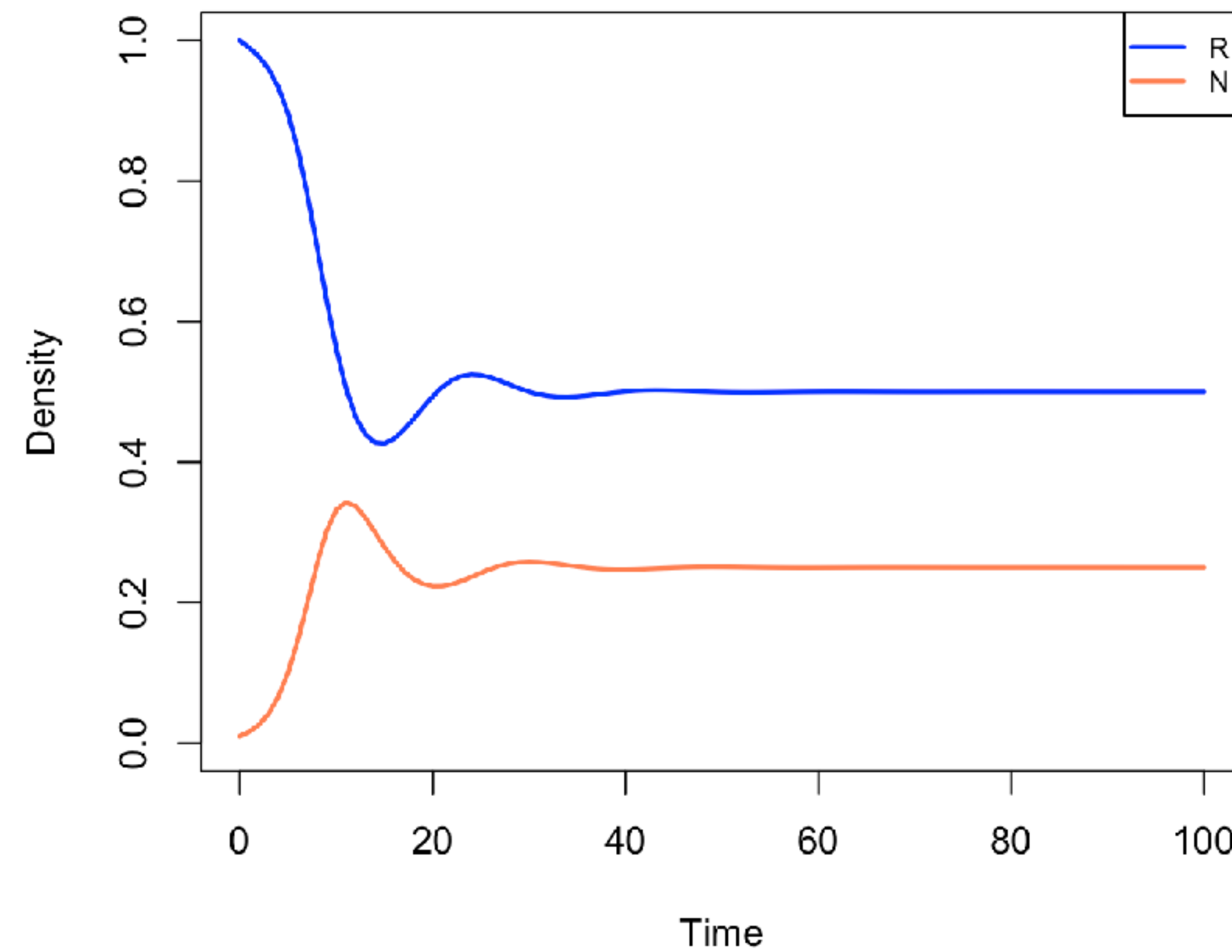
De totale faseruimte met alle *nullclines*



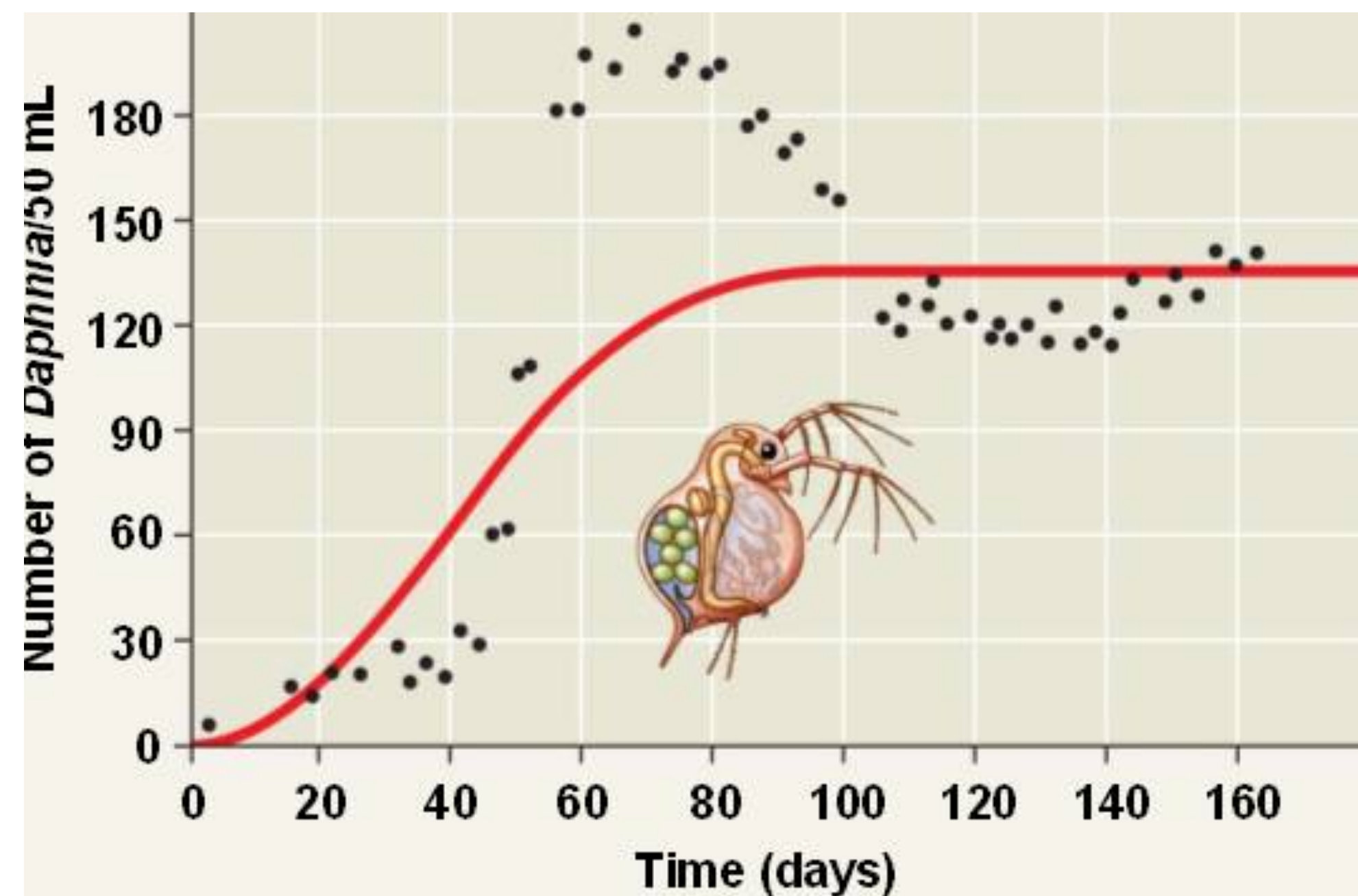
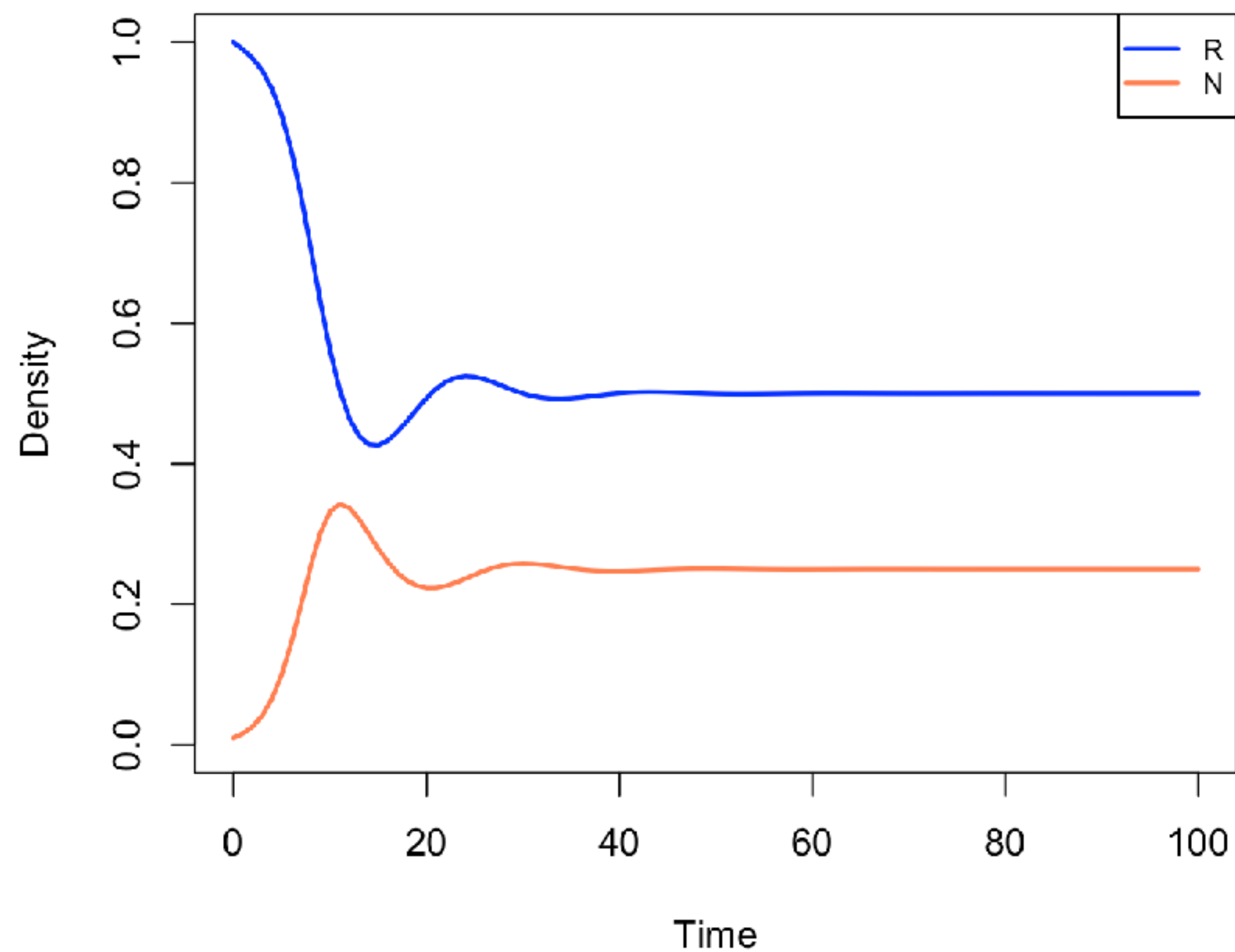
Faseruimte $\rightarrow$ Oplossingen (= grafiek!)



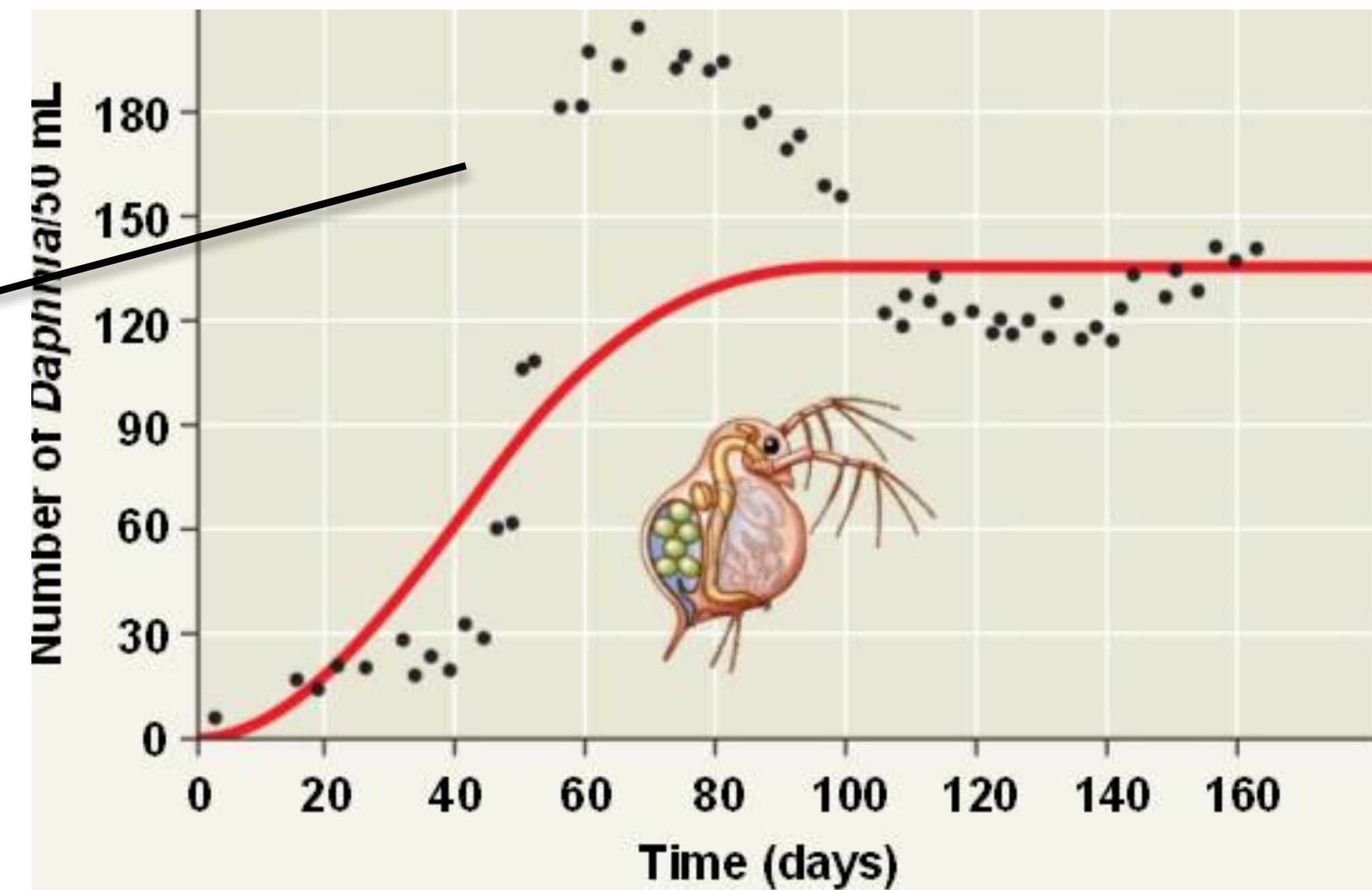
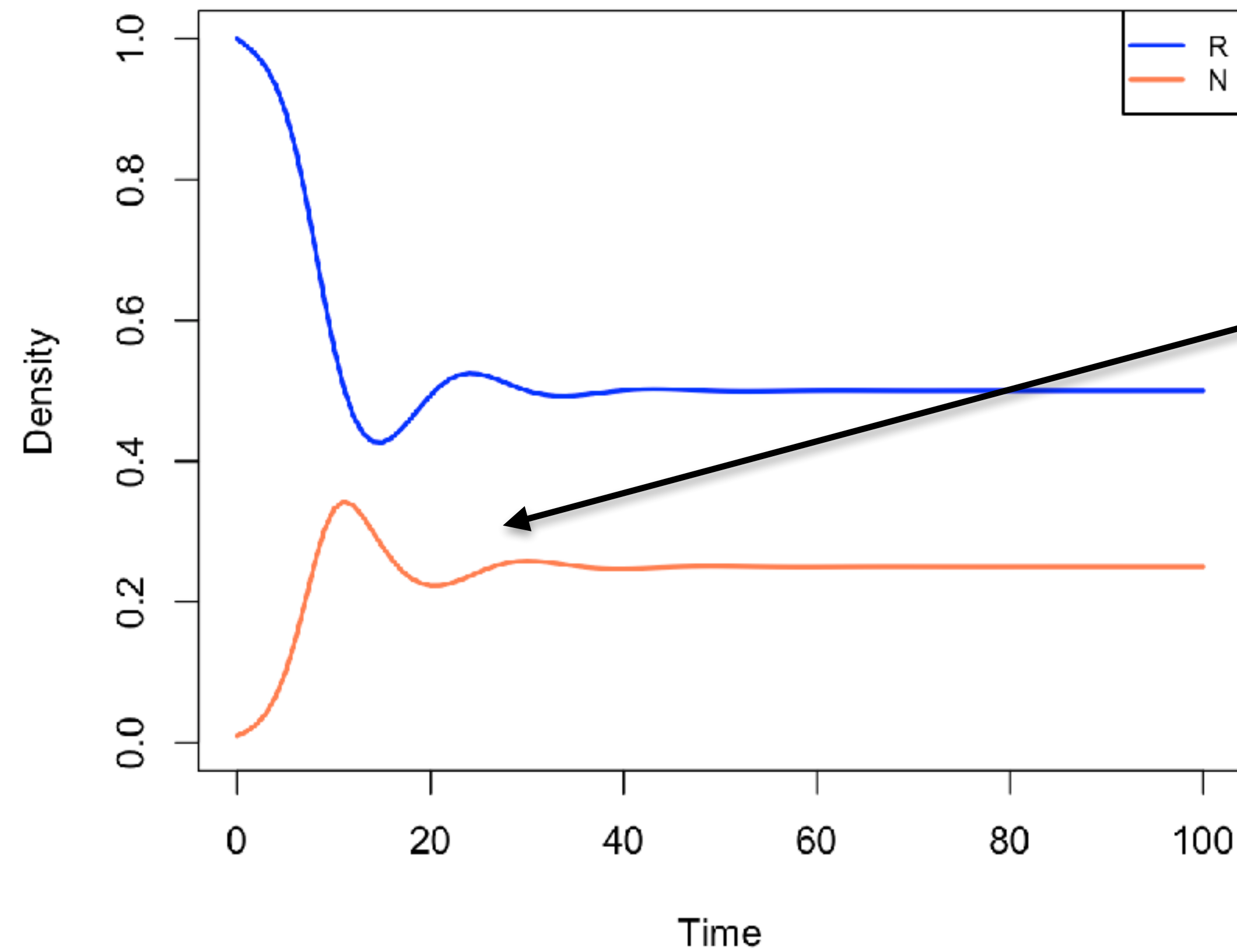
Faseruimte → Oplossingen (= grafiek!)



Faseruimte → Oplossingen (= grafiek!)

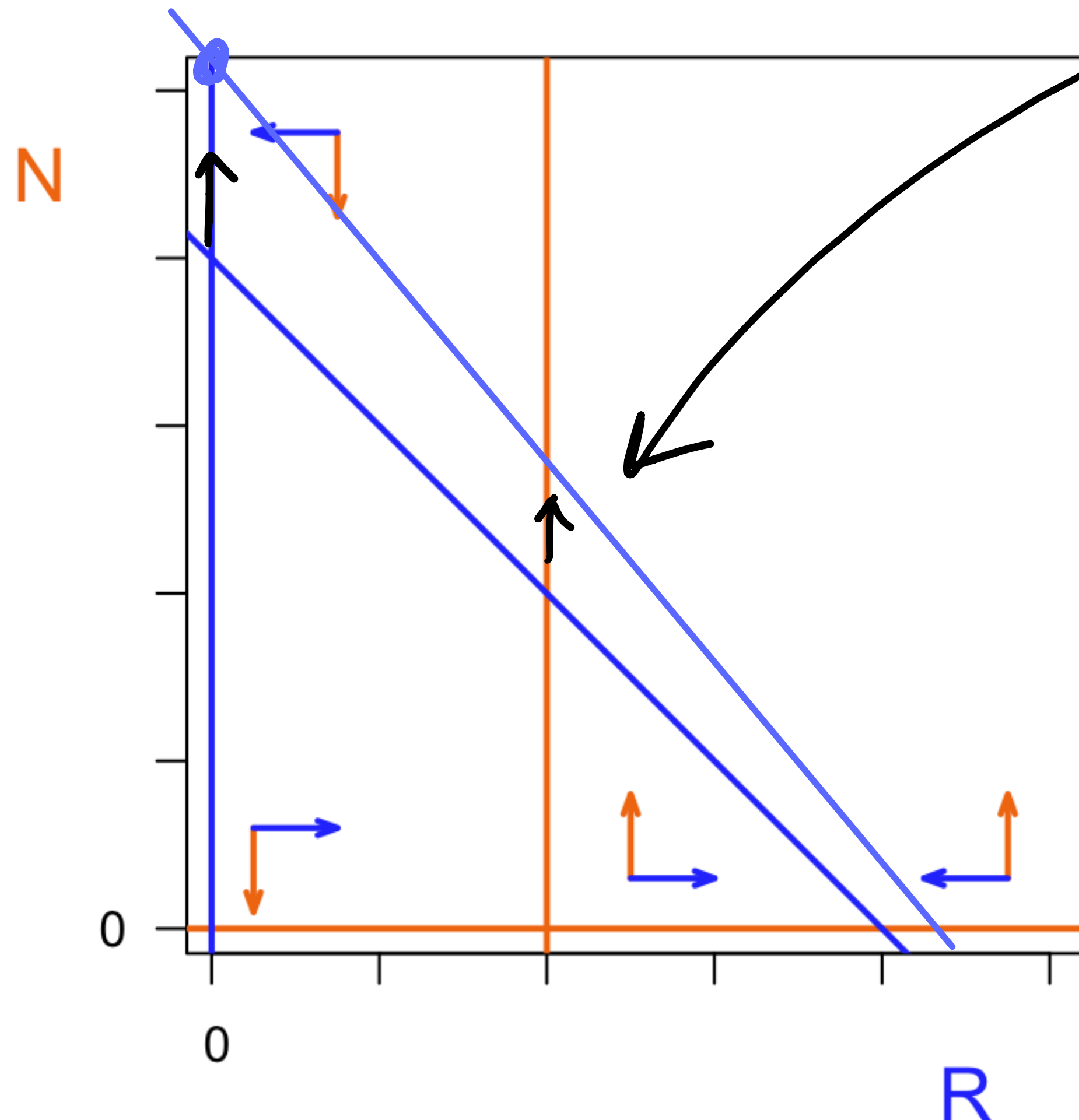


Faseruimte → Oplossingen (= grafiek!)



Stel je voor: we voeren de konijnen bij

$b = \text{max birth}$



$$R = 0 \quad b - \frac{bR}{K}$$

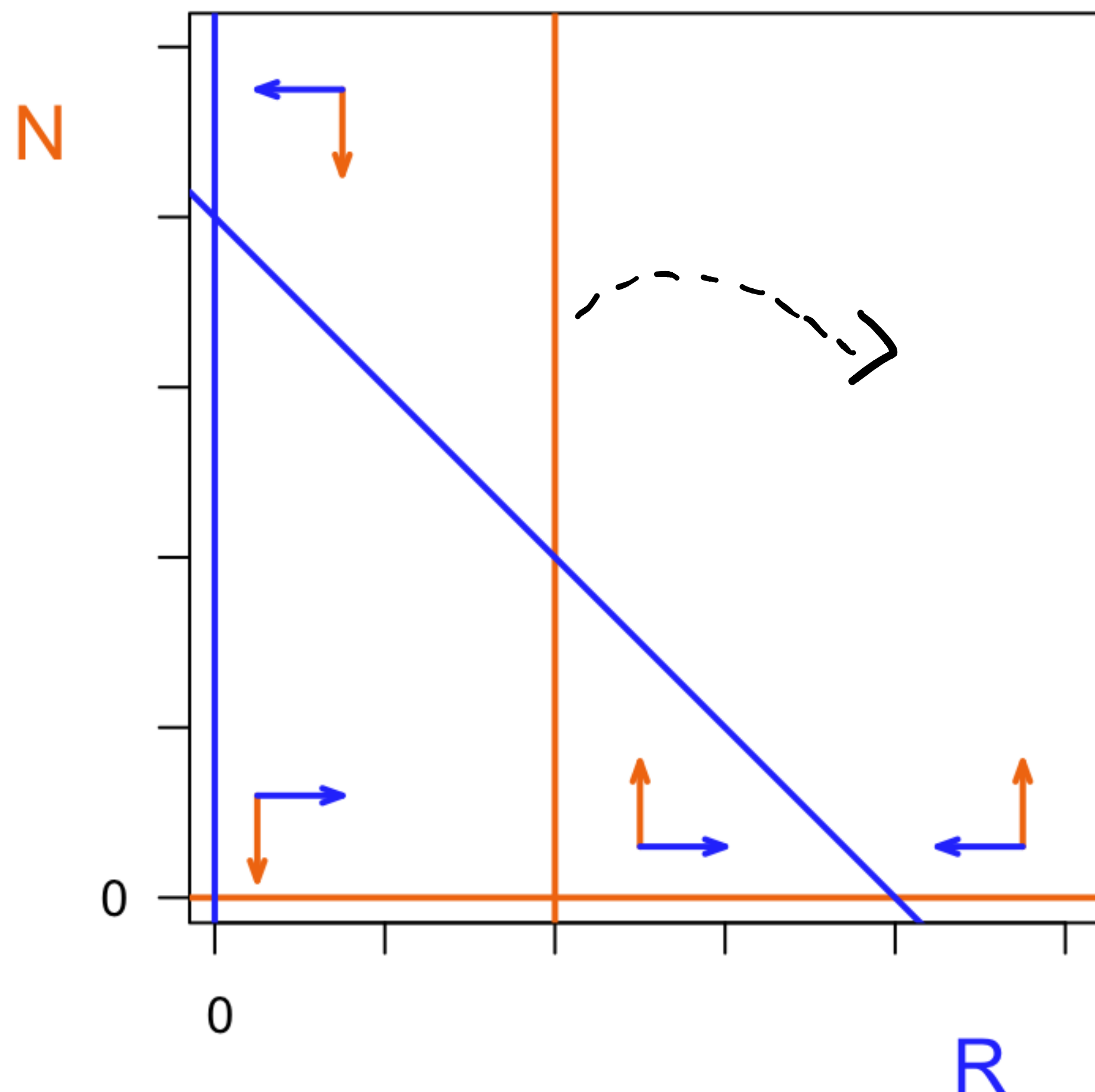
$$N = \frac{1}{a} \left(b \left(1 - \frac{R}{K} \right) - d \right)$$

$$N = 0$$

$$R = \frac{\delta}{ca}$$

Klein foutje in college!
Kijk ook nog eens
de kenniscip!

Stel je voor: vossen gaan vaker dood

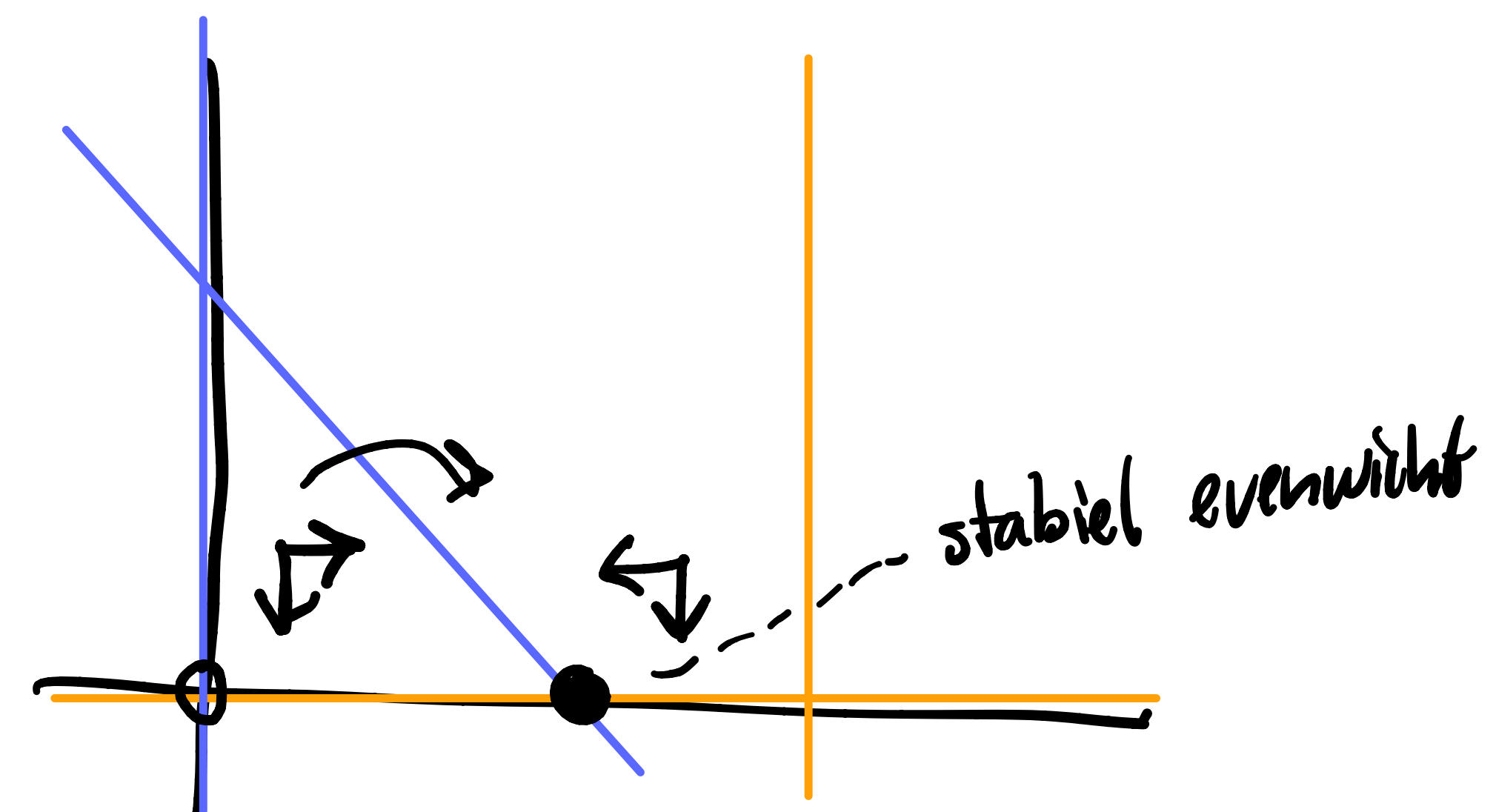


$$R = 0$$

$$N = \frac{1}{a} \left(b \left(1 - \frac{R}{K} \right) - d \right)$$

$$N = 0$$

$$R = \frac{\delta}{ca}$$







- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.



- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.
- Deze ODEs moeten wel aan elkaar **gekoppeld** zijn (anders zijn het gewoon 2 losse modellen!)



- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.
- Deze ODEs moeten wel aan elkaar **gekoppeld** zijn (anders zijn het gewoon 2 losse modellen!)
- We spreken dan van een **systeem van ODEs**, wat alleen in evenwicht is als **alle** vergelijkingen gelijk zijn aan 0 (=niet meer veranderen)



- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.
- Deze ODEs moeten wel aan elkaar **gekoppeld** zijn (anders zijn het gewoon 2 losse modellen!)
- We spreken dan van een **systeem van ODEs**, wat alleen in evenwicht is als **alle** vergelijkingen gelijk zijn aan 0 (=niet meer veranderen)
- Waar we voor 1 ODE een faseportret kunnen schetsen, hebben 2D ODEs een **faseRUIMTE** (2D), waarin *nullclines* en een een zogeheten *vectorveld* staan weergegeven



- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.
- Deze ODEs moeten wel aan elkaar **gekoppeld** zijn (anders zijn het gewoon 2 losse modellen!)
- We spreken dan van een **systeem van ODEs**, wat alleen in evenwicht is als **alle** vergelijkingen gelijk zijn aan 0 (=niet meer veranderen)
- Waar we voor 1 ODE een faseportret kunnen schetsen, hebben 2D ODEs een **faseRUIMTE** (2D), waarin *nullclines* en een een zogeheten *vectorveld* staan weergegeven
- Nullclines zijn lijnen waarop één van de twee variabelen niet verandert



- Met ODEs kunnen we ook veranderingen van **meerdere populaties** modelleren. Als dat twee populaties zijn heet dat “2D”, maar je kan ook 3D, 10D, of 100D ODEs maken.
- Deze ODEs moeten wel aan elkaar **gekoppeld** zijn (anders zijn het gewoon 2 losse modellen!)
- We spreken dan van een **systeem van ODEs**, wat alleen in evenwicht is als **alle** vergelijkingen gelijk zijn aan 0 (=niet meer veranderen)
- Waar we voor 1 ODE een faseportret kunnen schetsen, hebben 2D ODEs een **faseRUIMTE** (2D), waarin *nullclines* en een een zogeheten *vectorveld* staan weergegeven
- Nullclines zijn lijnen waarop één van de twee variabelen niet verandert
- Waar nullclines samenkomen, is er dus sprake van een **evenwicht**, waarbij het vectorveld aangeeft hoe de populaties naar het evenwicht toe zullen bewegen (of ervan weg, maar hier komen we in het volgende hoofdstuk op terug!)



Werkcollege = Vraag 14.1 t/m 14.4