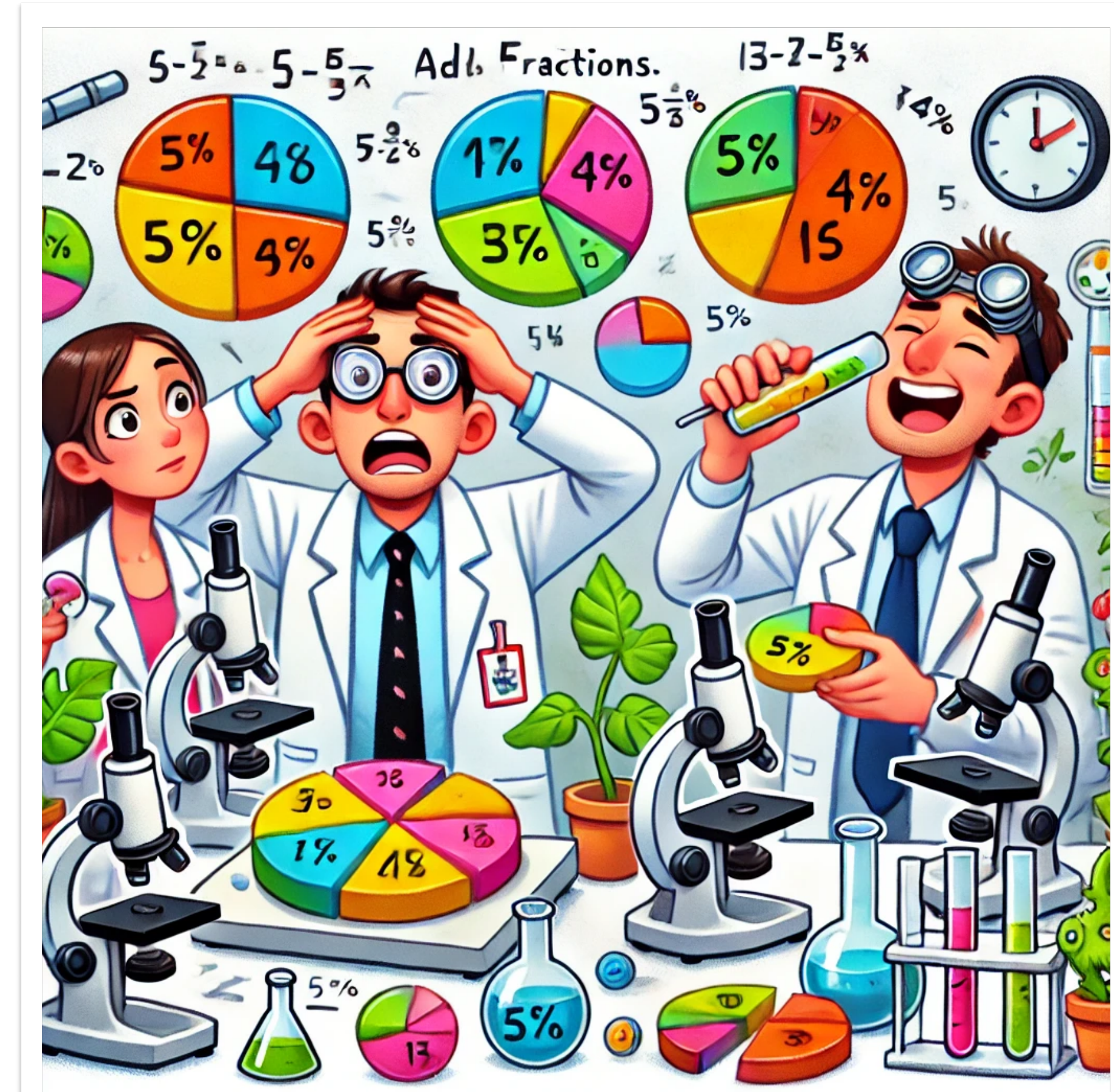


Algebra, breuken, exponenten en logaritmen

Bram van Dijk (hij/hem)

Algebra, breuken, exponenten en logaritmen

Bram van Dijk (hij/hem)



Algebra, breuken, exponenten en logaritmen

Bram van Dijk (hij/hem)



Werkcollege

Oefening 2.4 (Vissen vrijlaten)



Een ecooloog heeft data verzameld over de lengte van vissen in een vijver, omdat hij vissen langer dan 15 cm wil uitzetten in een natuurlijk meer. De data staat in de volgende vector:

```
# De dataset met lengtes van vissen (in cm):  
lengtes <- c(12, 18, 7, 21, 15, 16, 14, 10, 20, 17)
```

Door een vector te controleren op een bepaalde voorwaarde krijg je een nieuwe vector terug, met voor elke meting of dit waar is of niet. Omdat **TRUE** gelijk staat aan 1, en **FALSE** gelijk staat aan 0, kun je met de functie **sum** vervolgens bepalen hoeveel metingen aan een bepaalde voorwaarde voldoen.

- Gebruik de bovenstaande informatie om de tellen hoeveel vissen groter of gelijk aan 15 cm zijn.
- Bereken het *percentage* vissen dat te klein zijn om uit te zetten.

In plaats van specifieke waarden als index te gebruiken, kun je ook een **TRUE / FALSE**-vector gebruiken

R komt met veel voorbeelddata (zie `data()`)



Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.
- *“Who checks the computer?”*

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.
- *“Who checks the computer?”*
- Hoe weet jij, zonder de nodige basiskennis, of het allemaal wel klopt wat eruit komt?

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.
- *“Who checks the computer?”*
- Hoe weet jij, zonder de nodige basiskennis, of het allemaal wel klopt wat eruit komt?

*(bijv. als jij niet weet dat een klein getal kwadrateren een **extra** klein getal zou moeten geven, kijk je daar wellicht overheen!)*

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.
- *“Who checks the computer?”*
- Hoe weet jij, zonder de nodige basiskennis, of het allemaal wel klopt wat eruit komt?

*(bijv. als jij niet weet dat een klein getal kwadrateren een **extra** klein getal zou moeten geven, kijk je daar wellicht overheen!)*

- Hoe weet jij, wat je precies **in** je computer moet stoppen?

Waarom wiskunde?

Hadden we niet net geleerd dat de computer daar superhandig voor is?

- Jazeker, AI, machine learning, big data. Heul handig allemaal.
- Maar.
- *“Who checks the computer?”*
- Hoe weet jij, zonder de nodige basiskennis, of het allemaal wel klopt wat eruit komt?

*(bijv. als jij niet weet dat een klein getal kwadrateren een **extra** klein getal zou moeten geven, kijk je daar wellicht overheen!)*

- Hoe weet jij, wat je precies **in** je computer moet stoppen?



Wiskunde moet je oefenen

Wiskunde moet je oefenen

Bram van Dijk

vak	SE-I	SE-II	SE-III
	(eindrapport klas 3)		
Nederlands	7,0	8,9	7,1
Engels	7,4	7,4	8,9
wiskunde	6,7	7,8	8,4
natuur- scheikunde 1	6,9	6,2	7,3
natuur- scheikunde 2	7,1	7,5	7,1
biologie	6,9	7,0	6,7
economie	7,6	6,6	7,1
maatschappijleer	8		

Wiskunde moet je oefenen

Bram van Dijk

vak	SE-I (eindrapport klas 3)	SE-II	SE-III
Nederlands	7,0	8,9	7,1
Engels	7,4	7,4	8,9
wiskunde	6,7	7,8	8,4
natuur- scheikunde 1	6,9	6,2	7,3
natuur- scheikunde 2	7,1	7,5	7,1
biologie	6,9	7,0	6,7
economie	7,6	6,6	7,1
maatschappijleer	8		

Wiskunde moet je oefenen

Bram van Dijk

vak	SE-I	SE-II	SE-III
	(eindrapport klas 3)		
Nederlands	7,0	8,9	7,1
Engels	7,4	7,4	8,9
wiskunde	6,7	7,8	8,4
natuur- scheikunde 1	6,9	6,2	7,3
natuur- scheikunde 2	7,1	7,5	7,1
biologie	6,9	7,0	6,7
economie	7,6	6,6	7,1
maatschappijleer	8		

(dit is een VMBO cijferlijst!)

Van abstracte “onbekenden”...

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”



Momo (links) en Maca (rechts)

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”



Momo (links) en Maca (rechts)

- Maca eet twee keer per dag 27 gram brokjes

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”



Momo (links) en Maca (rechts)

- Maca eet twee keer per dag 27 gram brokjes
- Momo eet drie keer per dag ?? gram brokjes

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”



Momo (links) en Maca (rechts)

- Maca eet twee keer per dag 27 gram brokjes
- Momo eet drie keer per dag ?? gram brokjes
- In totaal eten ze 123 gram brokjes per dag

Van abstracte “onbekenden”...

$$2x + 5 = 10$$

$$2x + 5y = 10$$

Naar concrete “onbekenden”



Momo (links) en Maca (rechts)

- Maca eet twee keer per dag 27 gram brokjes
- Momo eet drie keer per dag ?? gram brokjes
- In totaal eten ze 123 gram brokjes per dag
- Hoeveel brokjes eet Momo per keer? (“onbekende”)

$$2 \cdot 27 + 3x = 123$$

De efficiënte spitsmuis



De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram



De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram



De efficiënte spitsmuis

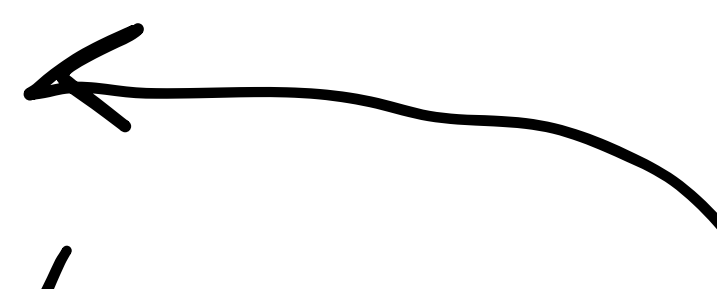
- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram
- Dagelijks verbruikt: 102 Cal



De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram
- Dagelijks verbruikt: 102 Cal

Klopt dit?

$$0.3 \cdot 20 = 6 \cdot 24 = 144$$




De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram
- Dagelijks verbruikt: 102 Cal

Klopt dit?

- Idee: energieverbruik slapend minder dan 0.3?



De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram
- Dagelijks verbruikt: 102 Cal

Klopt dit?

- Idee: energieverbruik slapend minder dan 0.3?
- De spitsmuis slaapt 14 uur



De efficiënte spitsmuis

- Energieverbruik: 0.3 Cal per uur per gram
- Gewicht: 20 gram
- Dagelijks verbruikt: 102 Cal

Klopt dit?

- Idee: energieverbruik slapend minder dan 0.3?
- De spitsmuis slaapt 14 uur
- ... en nu?



Algebra

$$\underbrace{10 \cdot 6}_{\text{verbruik wakker}} + \underbrace{14 \cdot 6 \cdot x}_{\text{verbruik slapend}} = \underbrace{102}_{\text{totaal verbruik}}$$

$$60 + 84x = 102$$

$$84x = 102 - 60 \rightarrow 42$$

$$x = \frac{42}{84}$$

“Naar de andere kant halen”...

~~“Naar de andere kant halen”...~~

~~“Naar de andere kant halen”...~~

“Hetzelfde doen aan beide kanten!”

Algebra

$$\underbrace{10 \cdot a}_{\text{verbruik wakker}} + \underbrace{14 \cdot a \cdot x}_{\text{verbruik slapend}} = \underbrace{102}_{\text{totaal verbruik}}$$

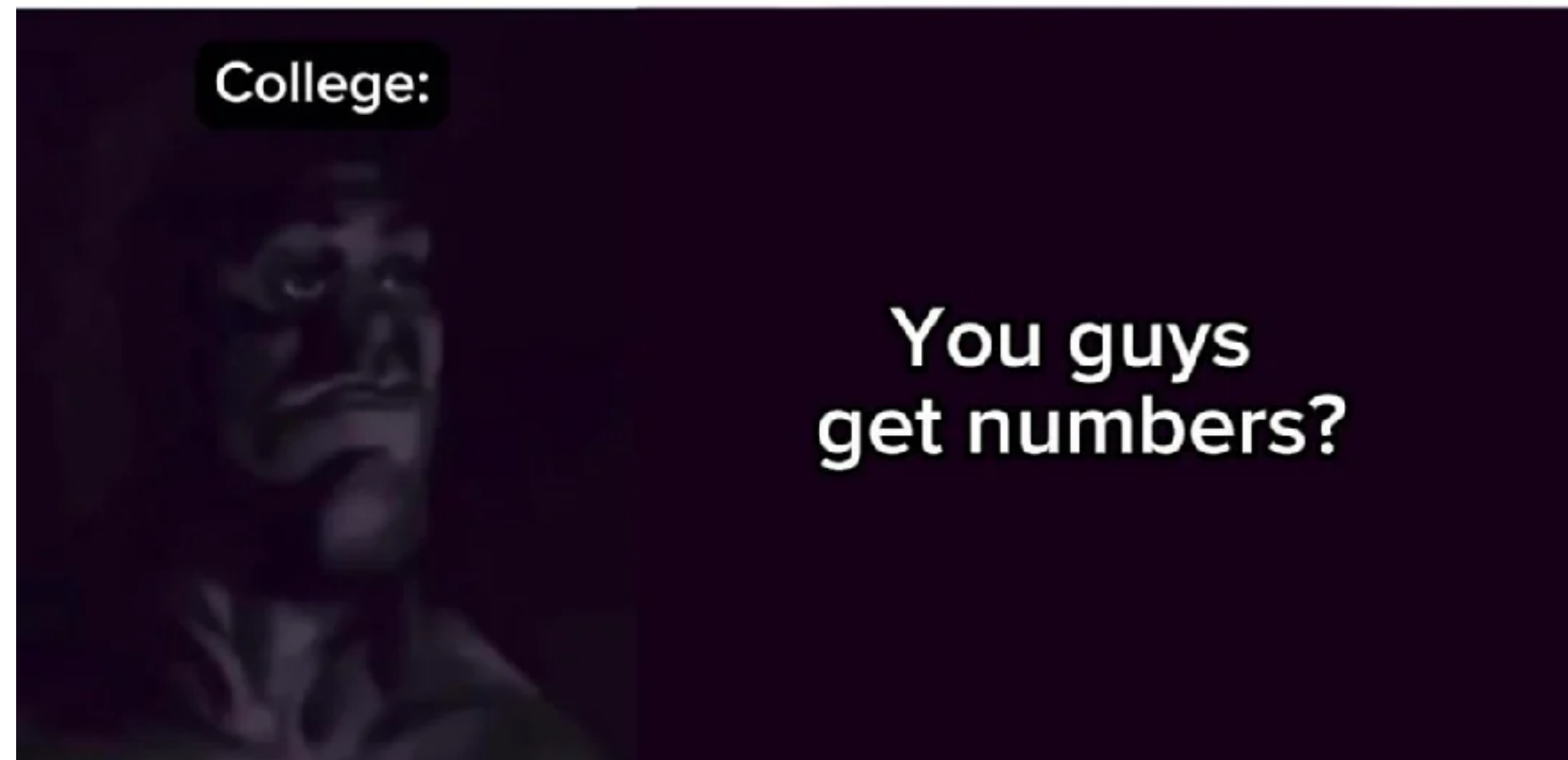
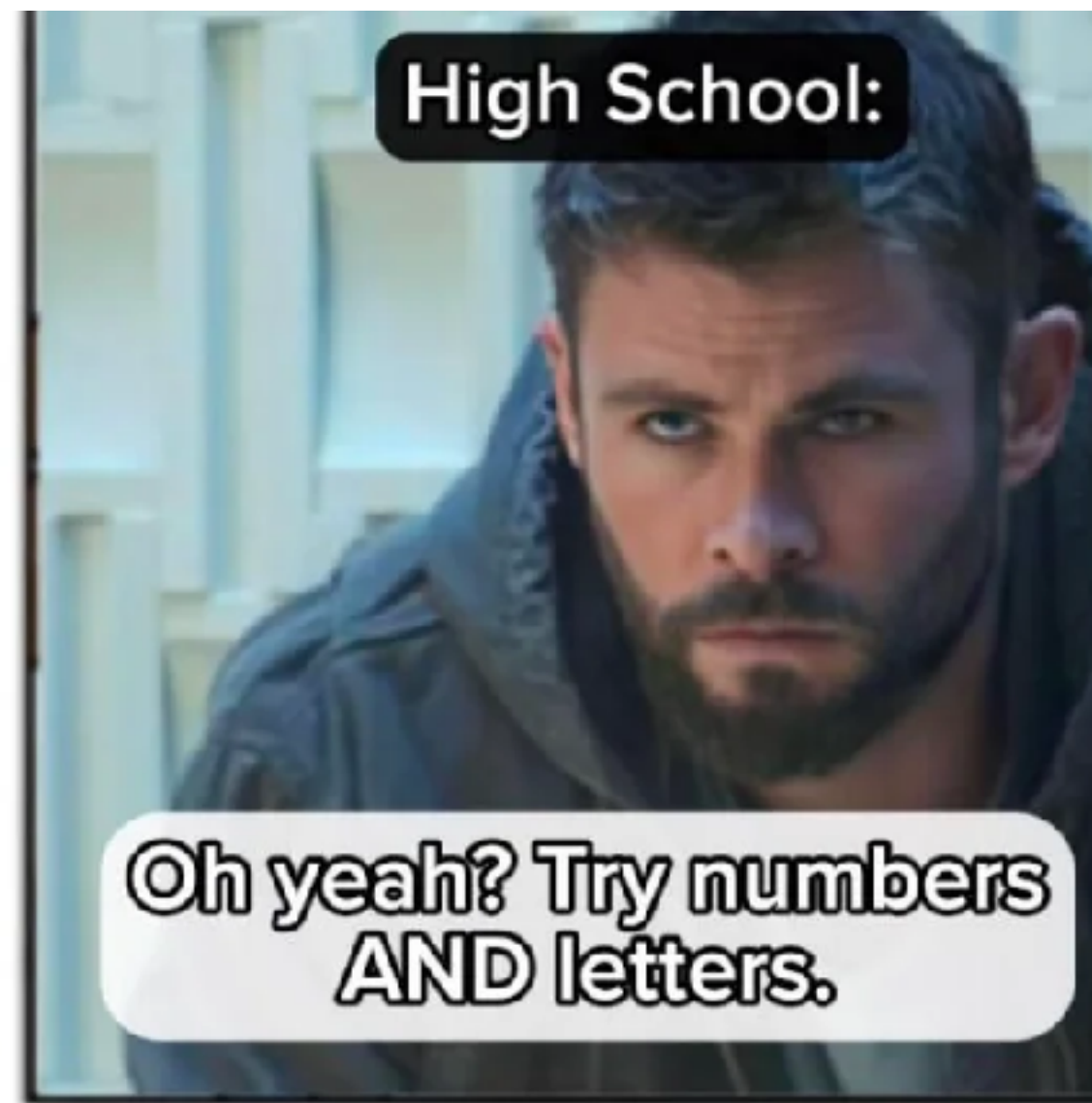
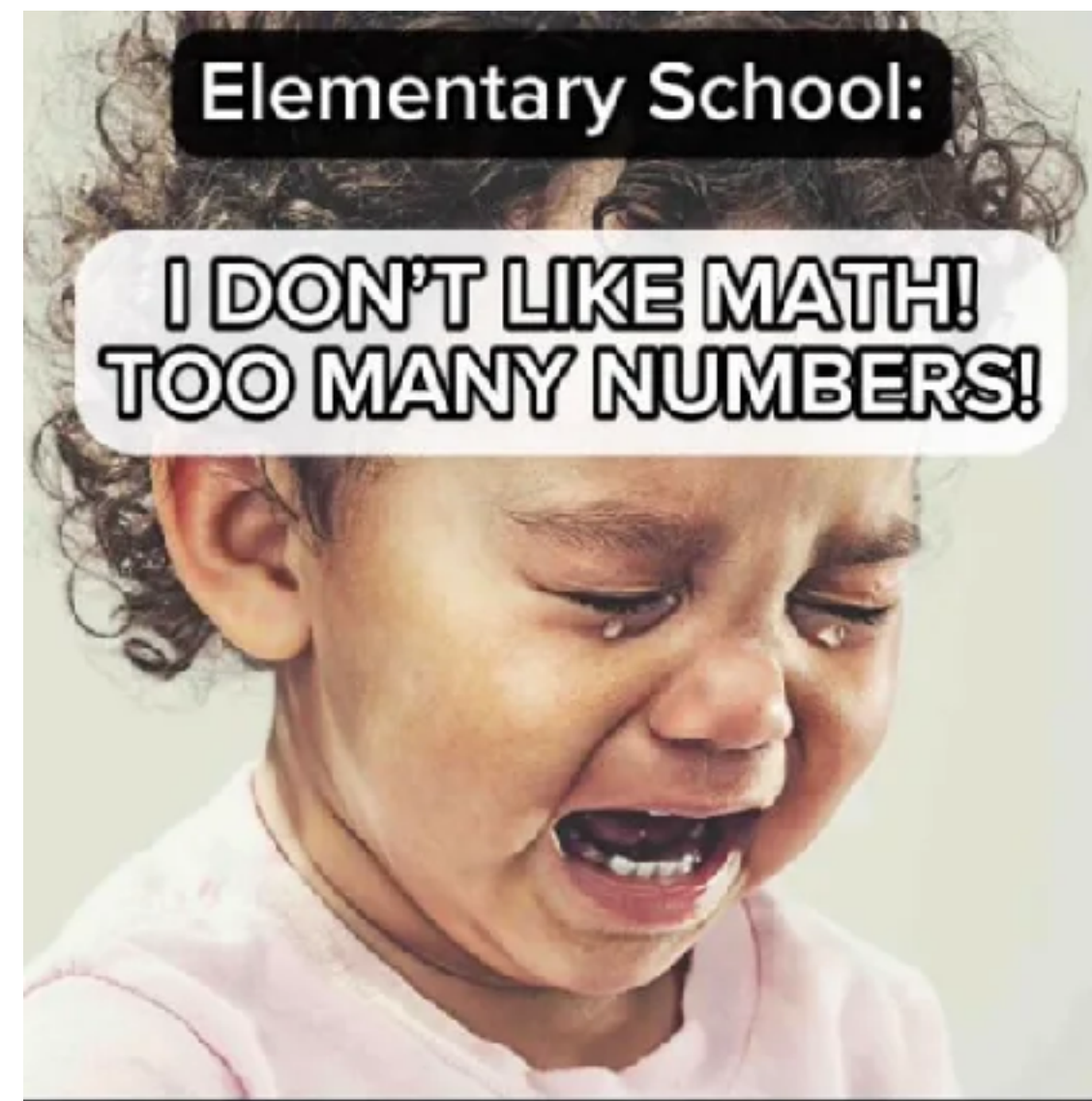
Algebra


$$\underbrace{10 \cdot a}_{\text{verbruik wakker}} + \underbrace{14 \cdot a \cdot x}_{\text{verbruik slapend}} = \underbrace{102}_{\text{totaal verbruik}}$$

Algebra

“vrije parameter”


$$\underbrace{10 \cdot a}_{\text{verbruik wakker}} + \underbrace{14 \cdot a \cdot x}_{\text{verbruik slapend}} = \underbrace{102}_{\text{totaal verbruik}}$$



Vrije parameters zien er ingewikkeld uit, maar er verandert niets.
De regel blijft dat alles goed gaat **zolang je aan beide kanten hetzelfde doet**.

Volgorde maakt uit!

De afgesproken volgorde:

1. **h**aakjes
2. **m**achtsverheffen en **w**orteltrekken
3. **v**ermenigvuldigen en **d**elen
4. **o**ptellen en **a**ftrekken

(hoe moeten wij van de onvoldoendes afkomen?)

~~meneer van dale wacht op antwoord~~

Lineaire verbanden

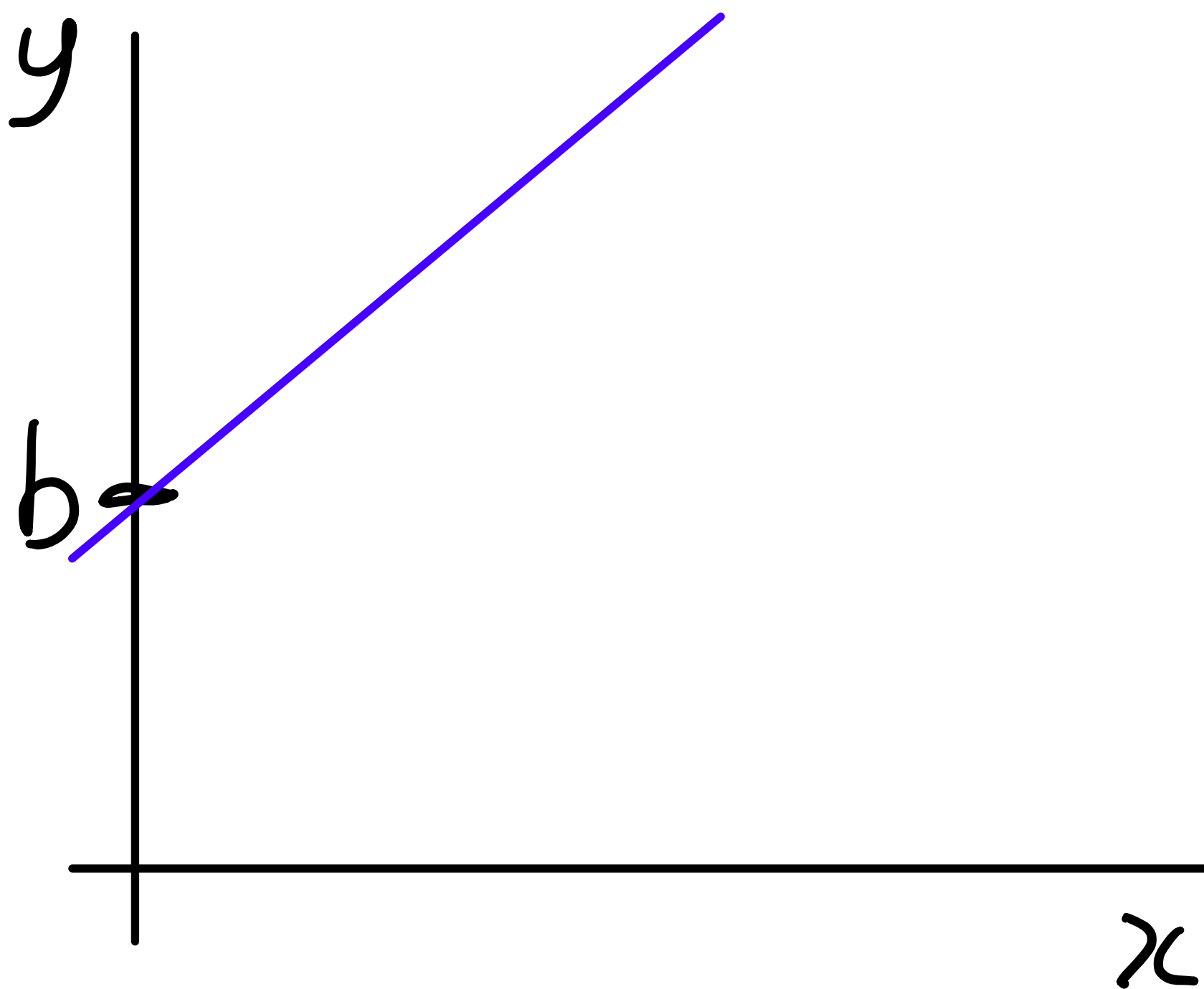
$$y = 2x + 3$$

$$4(x - 18) = -12 - x$$

Lineaire verbanden (vrije parameters)

$$y = ax + b$$

$$a(x - b) = -c - x$$



Kwadratische verbanden

$$y = 2x^2 + 4x$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Het bewijs dat 2 gelijk is aan 1...

$$a = b$$

$$a \cdot a = b \cdot a$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1$$

$\swarrow \times a$

$\swarrow$

$\swarrow - b^2$

$\swarrow \div (a - b)$

buiten haakjes

Het bewijs dat 2 gelijk is aan 1...

$$a = b$$

$$a \cdot a = b \cdot a$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

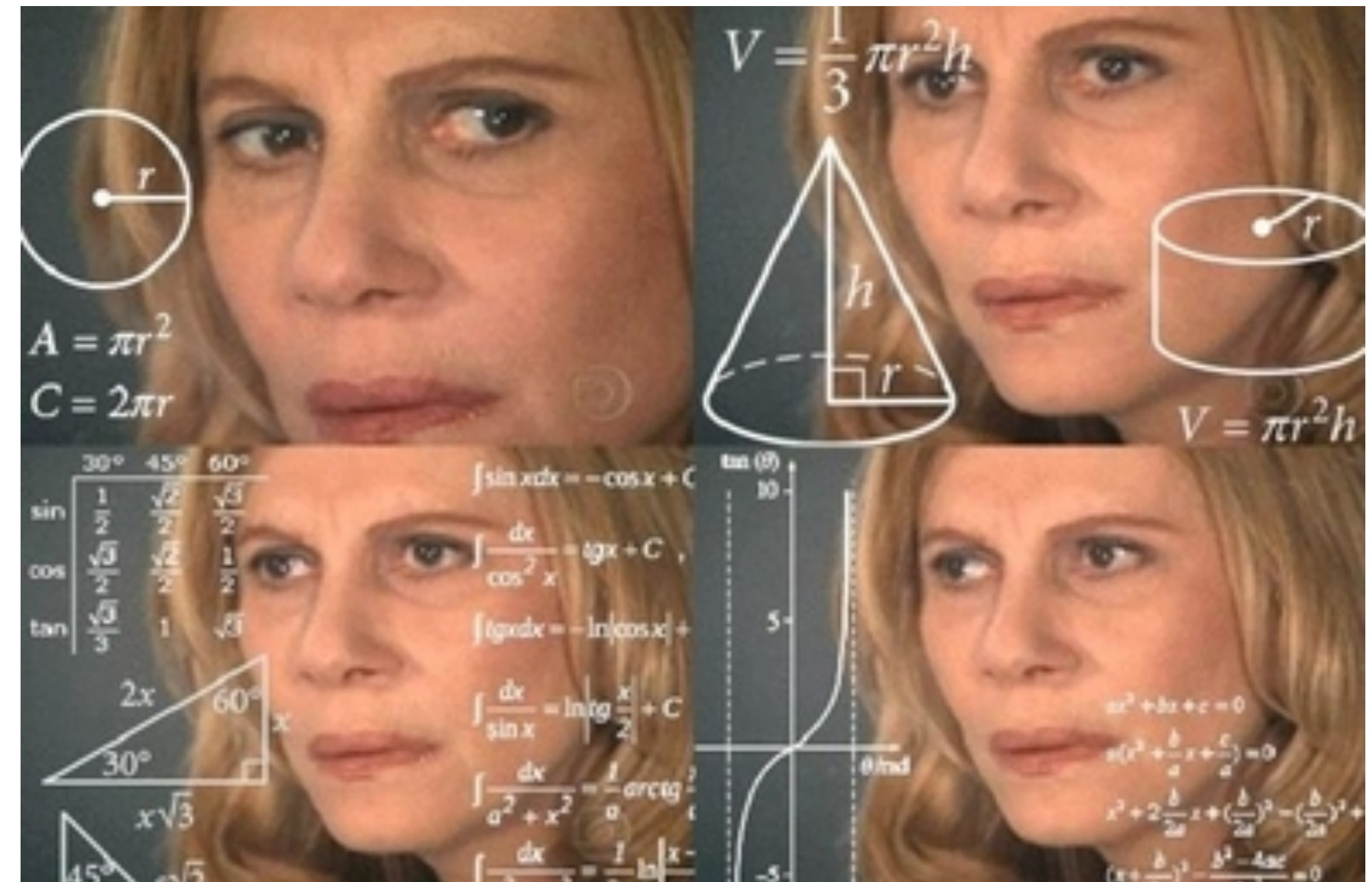
$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1$$



De regel blijft dat alles goed gaat **zolang je aan beide kanten hetzelfde doet.**

De regel blijft dat alles goed gaat **zolang je aan beide kanten hetzelfde doet.**

Met vrije parameters: kijk uit dat het wel goed gaat! (deel bijvoorbeeld niet door 0!)

Functies plotten (R en desmos.com)

$$y = ax^2 + bx + c$$



Kwadraten kunnen meerdere oplossingen geven

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 = a$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$$

$$x = \pm \sqrt{a}$$

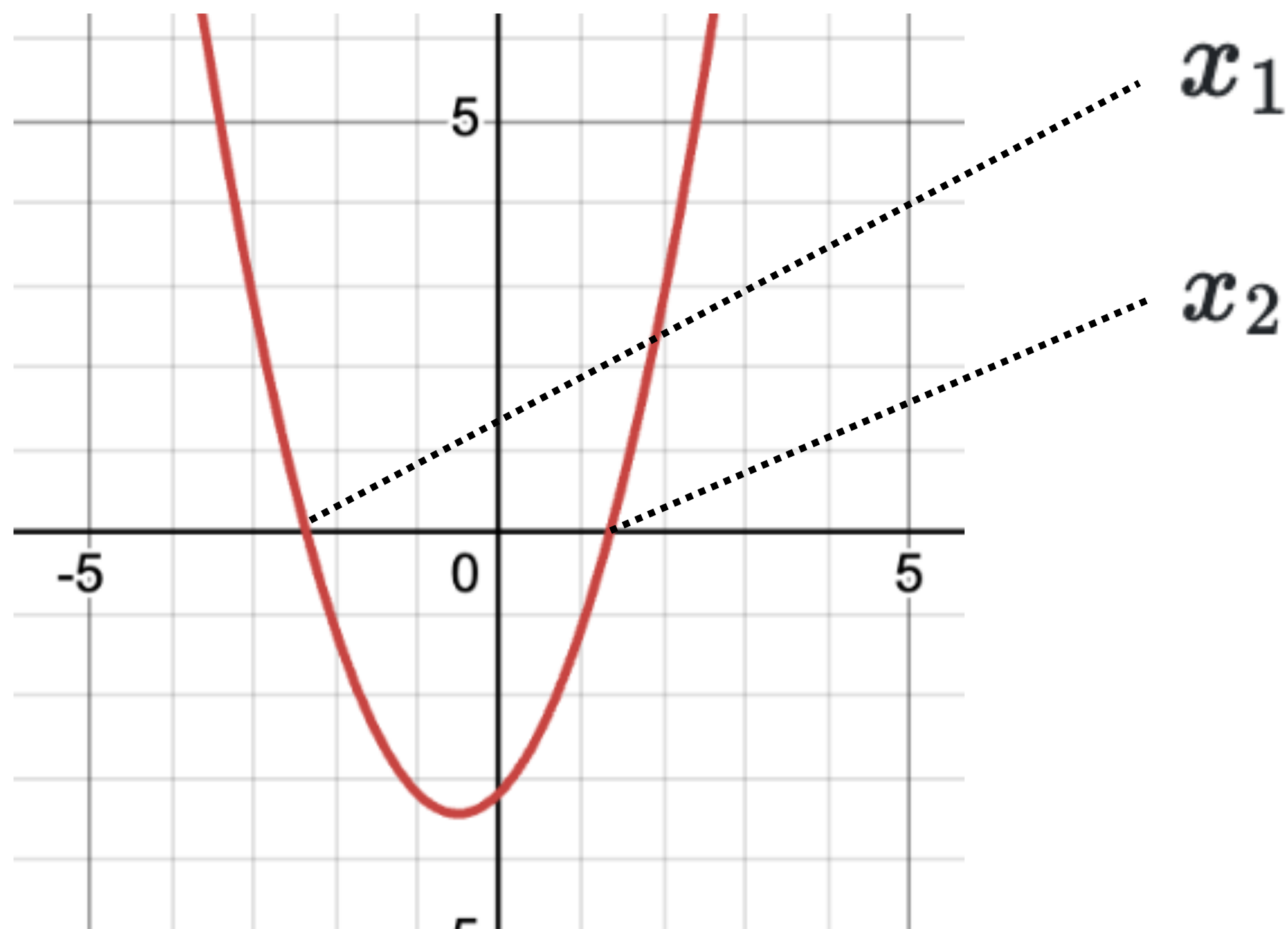
Me: if $X^2 = 9$ then X is 3

My math teacher:



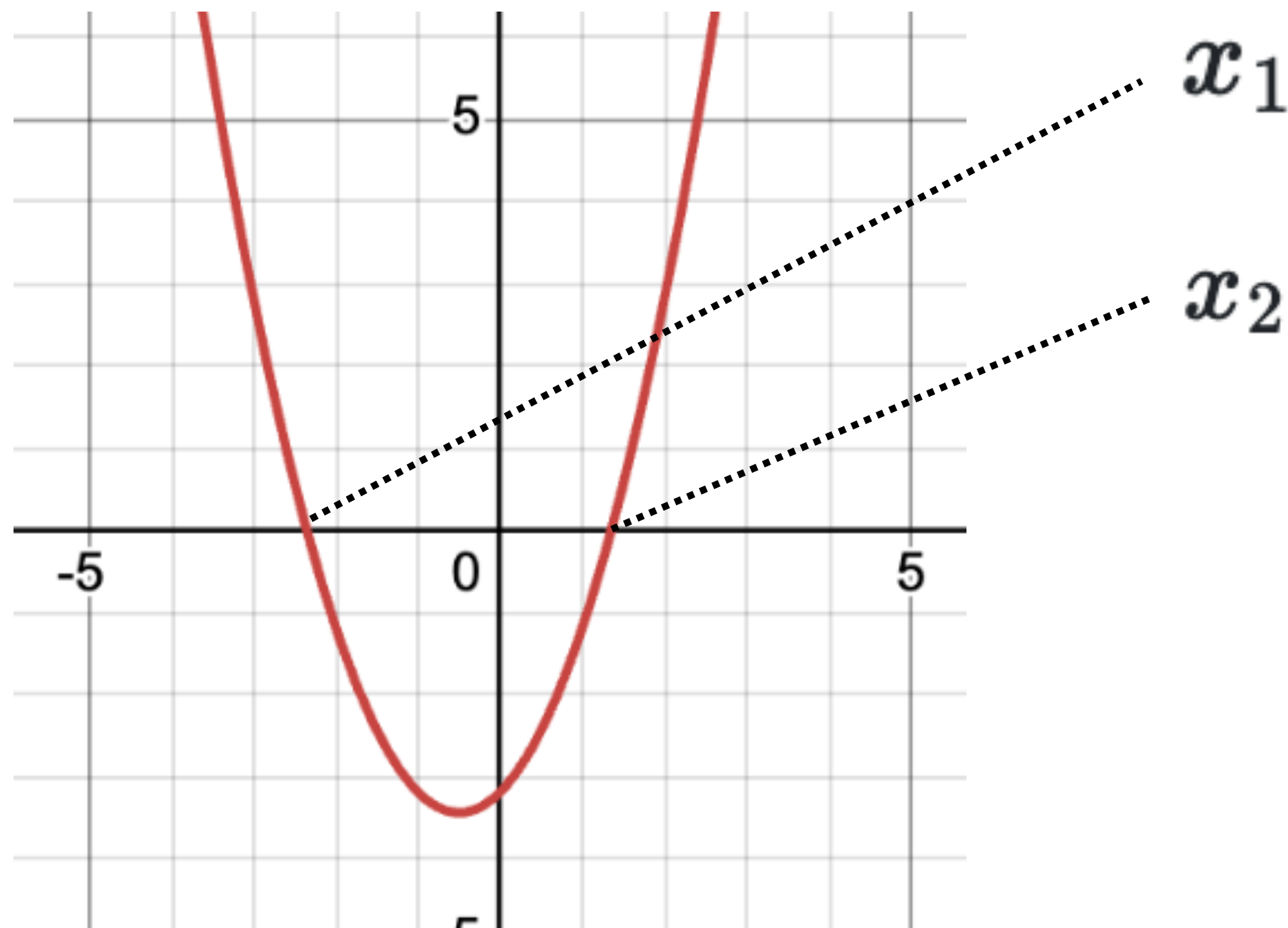
ABC-formule

$$y = ax^2 + bx + c$$



ABC-formule

$$y = ax^2 + bx + c$$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sommatietekenen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^5 (x_i)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i^2)$$

$$\sum (i) = 1 + 2 + 3 + 4$$

Rekenen met breuken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$



Rekenen met breuken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Rekenen met breuken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \qquad \frac{3}{5} + \frac{4}{7} = ??$$

Rekenen met breuken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = ??$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ??$$

Rekenen met breuken

- Wordt vaak **oppervlakkig begrepen**, en dit kan verwarrend worden zodra we met vrije parameters gaan werken. Oefen hier dus wel mee tijdens het WC!

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = ??$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ??$$

Breuken optellen / aftrekken

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{a} \rightarrow 1$$

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

$$=$$

$$\frac{ad+bc}{bd}$$

Breuken optellen / aftrekken

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$$

“Breuken” optellen / aftrekken

“Breuken” optellen / aftrekken

$$1 - \frac{c}{d} =$$

$$\frac{d}{d} - \frac{c}{d} = \frac{d-c}{d}$$

Soms ziet het er veel ingewikkelder uit dan het is!

Soms ziet het er veel ingewikkelder uit dan het is!

$$6x^2 - 5x + ax - a(2x^2 + 4) + x - a + 4x = 0$$

Soms ziet het er veel ingewikkelder uit dan het is!

$$6x^2 - 5x + ax - a(2x^2 + 4) + x - a + 4x = 0$$

Neem aan dat $a=3$

Soms ziet het er veel ingewikkelder uit dan het is!

$$6x^2 - 5x + ax - a(2x^2 + 4) + x - a + 4x = 0$$

Neem aan dat $a=3$

$$6x^2 - 5x + 3x - 3(2x^2 + 4) + x - 3 + 4x = 0$$

$$6x^2 - 5x + 3x - 6x^2 + 12 + x - 3 + 4x = 0$$

$$-5x + 3x - 12 + x - 3 + 4x = 0$$

$$-5x + 3x + x + 4x = 12 + 3$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

Soms ziet het er veel ingewikkelder uit dan het is!

$$6x^2 - 5x + ax - a(2x^2 + 4) + x - a + 4x = 0$$

Neem aan dat $a=3$

$$6x^2 - 5x + 3x - 3(2x^2 + 4) + x - 3 + 4x = 0$$

When you solve a maths problem 3 times

$$6x^2 - 5x + 3x - 6x^2 + 12 + x - 3 + 4x = 0$$

$$-5x + 3x - 12 + x - 3 + 4x = 0$$

$$-5x + 3x + x + 4x = 12 + 3$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$



and get different answer each time

Andere regels voor breuken

Andere regels voor breuken

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b} \quad \text{en ook} \quad \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

Andere regels voor breuken

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b} \quad \text{en ook} \quad \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Andere regels voor breuken

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b} \quad \text{en ook} \quad \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

$$\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Andere regels voor breuken

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b} \quad \text{en ook} \quad \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Rekenregel

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Vrije parameters maken ruimte voor verschillende “aannames”

~~4~~ aangenomen dat...

$$b > a$$

We nemen (bijna) altijd aan: parameters zijn positief!

We kunnen namelijk gewoon met + en - aangeven of het positief of negatief is

$$\text{groei} = \text{geboorte} - \text{sterfte}$$

$$g = b - d$$

Uitzonderingen zijn de “algemene” vormen van vergelijkingen:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Exponenten

beginhoeveelheid



$$B = B_0 \cdot 2^n$$



hoeveelheid bacteriën

Exponenten

Rekenregel

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \text{ als } a \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(a^n \cdot b^m)^q = a^{nq} \cdot b^{mq}$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^0 = 1$$

$$q = 2 \quad a \cdot a \cdot q \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$n = 3 \quad \left. \begin{array}{l} n = 3 \\ m = 4 \end{array} \right\} 7 \quad \nearrow \quad a^7$$

$$m = 4$$

$$a = 2$$

$$n = 5$$

$$m = 3$$

$$n - m = 2$$

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a$$

$$a^2$$

Kwadrateren van grote/kleine getallen

Belangrijk dat je dit in je systeem hebt!

$$a^2 \quad \text{voor} \quad a \ll 1$$

$$a^2 < a$$

$$b^2 \quad \text{voor} \quad b \gg 1$$

$$b^2 > b$$

Logaritmen

$$B = B_0 \cdot 2^n$$



$$10^2 = 100$$

$${}^{10}\log(100) = 2$$

Logaritmen

Rekenregel	Voorbeeld
${}^b \log b^a = a$	${}^{10} \log 1000 = {}^{10} \log 10^3 = 3$
$\log a + \log b = \log ab$	$\log 100 + \log 10 = \log 1000$
$\log a - \log b = \log a/b$	$\log 8 - \log 2 = \log 8/2 = \log 4$
$a \cdot \log b = \log b^a$	$7 \cdot \log 5 = \log 5^7$
${}^a \log a = 1$	${}^2 \log 2 = 1$
${}^a \log c = b \Rightarrow a^b = c$	${}^2 \log 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

$$B = B_0 \cdot 2^x$$

$$\log(B) = \log(B_0 \cdot 2^x)$$

$$\log(B) = \log(B_0) + \log(2^x)$$

$$\log(B) = \underbrace{\log(B_0)}_{\text{constante}} + x \cdot \underbrace{\log(2)}_{\text{constante}}$$

$$y = A + x \cdot B$$