Nakijk Model

Name:
Student number:

Question 1. Fazanten en vossen
In de Nederlandse duinen worden fazanten gegeten door vossen. Beschouw het volgende klassieke model voor fazanten F en vossen V:

$$\frac{dF}{dt} = rF[1 - F/K] - \frac{bFV}{h+F} \quad \text{en} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{cbFV}{h+F} - dV \,,$$

met een logistische groei van de fazanten.

4 **a.** Schets de isoclines voor de twee kwalitatief verschillende situaties waarbij de twee soorten samen voorkomen.

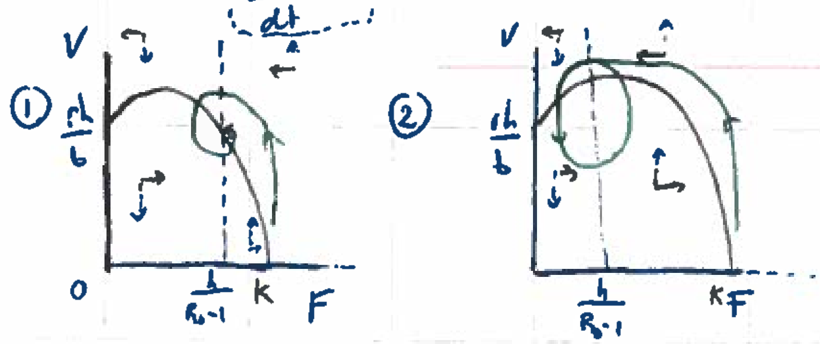
3 **b.** Teken in beide toestandruimtes een trajectorie die overeenkomt met de introductie van een paar vossen in een duingebied met een gezonde fazanten populatie.

3 **c.** De vossen mogen niet bejaagd worden maar de fazanten wel. We breiden dF/dt daarom uit met een term $-JF$ waar J de extra sterfte door de jacht is. Kies één van je toestandsruimtes van vraag a en voorspel wat er gebeurt met de fazanten en vossenstand.

Algebra $\dot F$	1/2
$\dot V$	1/2
Tekening $\dot V, \dot F$	2
	1

a) $\boxed{\frac{dF}{dt}=0} \Rightarrow F=0 \;\vee\; V = \frac{r}{b}\left(1-\frac{F}{K}\right)(h+F)$

$\frac{dV}{dt}=0 \Rightarrow V=0 \;\vee\; d(h+F) = cbF \Rightarrow F = \frac{dh}{cb-d} = \frac{h}{R_0-1}$; $R_0 = \frac{cb}{d}$

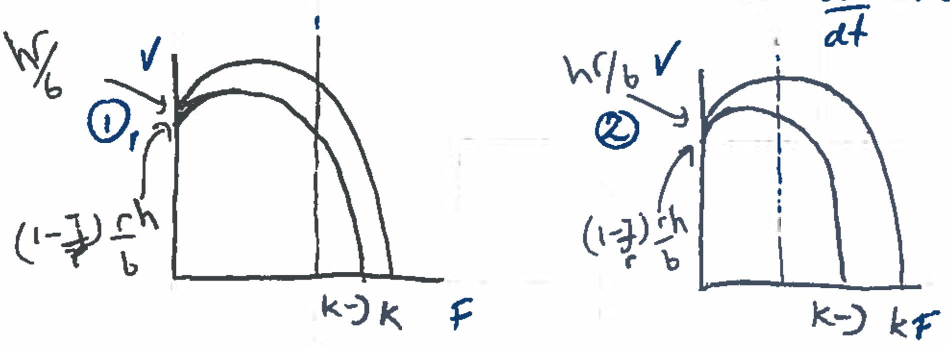


b) See panels made in a)

beginpunt
Gehouden aan V, F
kruising nullclines
Limiet cycles 1

c) $\frac{dF}{dt} = rF\left(1-\frac{F}{K}\right) - \frac{bFV}{h+F} - JF$. $\frac{dF}{dt}=0 \Rightarrow F=0 \;\vee\; V = \frac{r}{b}(h+F)\left(1-\frac{F}{K}-\frac{J}{r}\right)$

$\frac{dV}{dt}$ remains unchanged



of: "parabool komt lager te liggen"
plaatje/formule 2
conclusie over F 1/2
conclusie over V 1/2

F remains the same, but less V

Stabilization! On average F remains the same, V declines.

[correctiemodel]

Name:
Student number:

Question 2. Nutrienten in algen en watervlooien
Beschouw een meertje waarin algen en watervlooien groeien. De groei wordt gelimiteerd door de totale hoeveelheid stikstof, T, in het meer. Zowel algen als de watervlooien bouwen de stikstof die ze opnemen in. Door de algen en watervlooien slim te schalen kunnen we de hoeveelheid vrij stikstof in het water definieren als $F = T - A - W$, waar A de algen zijn en W de watervlooien. We schrijven het volgende model:

$$\frac{dA}{dt} = b\overset{T}{F}A - dA - cAW \quad \text{en} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{\beta AW}{h+A} - \delta W \, ,$$

waar de cAW de totale consumptie van algen per dag is.

2 pt **a.** De consumptieterm is wel verzadigd bij de watervlooien en niet bij de algen. Geef hiervoor een eigen interpretatie (antwoord in maximaal 30 woorden).

2 pt **b.** Wat is de R_0 van de algen en wat is die van de watervlooien? (Licht dit kort toe).

2 pt **c.** Hoeveel stikstof zit er in het water als de algen op hun carrying capacity zijn (en er dus geen watervlooien zijn)?

2 pt **d.** Schets de isoclines voor de situatie dat beide soorten voorkomen.

2 pt **e.** Bepaal de stabiliteit van alle evenwichten.

(a) Bij zekere algendichtheid verzadigt de groei van de watervlooien. Bij hogere algendichtheden blijven zij wel meer algen vangen, maar deze worden "ongebruikt" uitgescheden. [2 punten]

(b) In afwezigheid van watervlooien is de levensverwachting van de algen $\frac{1}{d}$. De maximale birth rate van de algen is bT, omdat F maximaal T is. De R_0 van de algen is dus $R_{0,A} = \frac{bT}{d}$. geen uitleg: 0 punten.
[per goede R_0: 1 punt]

De levensverwachting van de watervlooien is $\frac{1}{\delta}$. Hun p.c. birthrate is $\frac{\beta A}{h+A}$.

<u>manier 1</u>: de max. birth rate wordt bereikt voor $A \to \infty$, en is dan β. Dus $R_{0,W} = \frac{\beta}{\delta}$.

<u>manier 2</u>: de algendichtheid is maximaal als de algen op carrying capacity zijn.

De carrying capacity wordt gegeven uit $\frac{dA}{dt} = b(T-A)A - dA = 0$

$\Rightarrow \quad \bar{A} = T - \frac{d}{b} = T\left(1 - \frac{1}{R_{0,A}}\right)$.

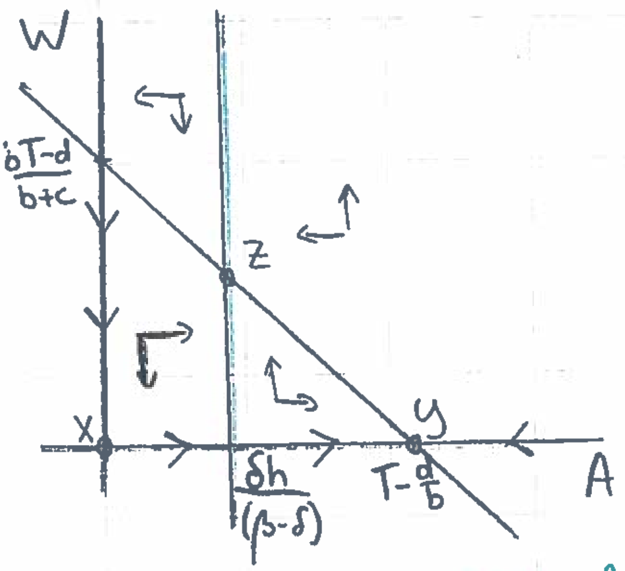
Dus $R_{0,W} = \frac{\beta \bar{A}}{h+\bar{A}} \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{\beta \bar{A}}{\delta(h+\bar{A})}$ met $\bar{A} = T\left(1 - \frac{1}{R_{0,A}}\right)$.

(c) Als $W=0$, $\frac{dA}{dt} = b(T-A)A - dA$. Bij (b) hebben we net berekend dat dan $\bar{A} = 0$ of $\bar{A} = T - \frac{d}{b}$ (carr. capacity).
De hoeveelheid vrij stikstof is dan $F = T - A = \frac{d}{b}$.
[carrying capacity: 1 pt, invullen: 1 pt]

(d) $\frac{dA}{dt} = b(T-A-W)A - dA - cAW = 0 \Rightarrow$ [per goede nullcline: 1 pt]

$A=0$ v. $bT - bA - d = (b+c)W$
$W = \frac{1}{(b+c)}(bT - d - bA)$.

$\frac{dW}{dt} = \frac{\beta AW}{h+A} - \delta W = 0 \Rightarrow W=0$ v. $\beta A = \delta(h+A)$
$A = \frac{\delta h}{(\beta - \delta)}$



−1: vectorveld fout
−1: triviale evenwichten vergeten

(e) Evenwichten x en y zijn zadelpunten, dit zien we aan het vectorveld. [1 pt]
Graphical Jacobian voor z is $J = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ +\gamma & 0 \end{pmatrix}$

$\det(J) = 0 - (-\beta\gamma) = \beta\gamma > 0$
$\mathrm{tr}(J) = -\alpha < 0$
$\Rightarrow$ Stabiel. [1 pt]

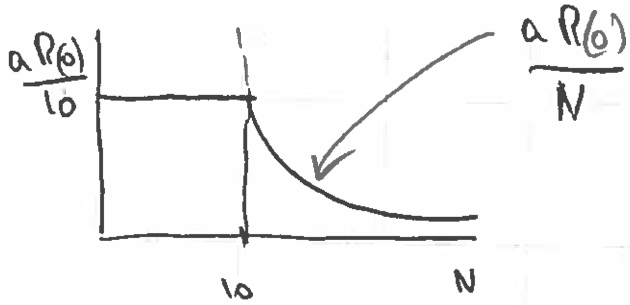
Name:
Student number:

Question 3. Rupsen en koolmezen in een bosperceeltje
Beschouw een populatie koolmezen in een stuk bos van 10ha tijdens hun broedseizoen. De mezen zijn strikt territoriaal en kunnen daarom alleen de rupsen eten in hun eigen territorium. In afwezigheid van concurrenten bezet een broedpaartje een territorium van 1ha. Als er meer dan 10 paartjes zijn wordt de territoriumgrootte kleiner, maar eerlijk verdeeld onder alle paartjes. De rupsen komen aan het begin van het seizoen tevoorschijn. Ze worden voornamelijk door de mezen gegeten en repliceren niet tijdens het seizoen. De variabele R beschrijft het totaal aantal rupsen in het bos. Het aantal rupsen in het territorium, $\hat{R}$, wordt dus gegeven door de functie $\hat{R} = R/\max(10, N)$. Neem aan dat het seizoen start met $R(0)$ rupsen. De mezen vangen elke rups die ze te pakken kunnen krijgen en we kiezen daarom voor een "mass action" predatieterm. Kortom in dit bos geldt het volgende model voor één enkel broedseizoen:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -dR - a\hat{R}N \quad \text{waar} \quad \hat{R} = \frac{R}{\max(10, N)},$$

d de normale sterfte van de rupsen is (per dag), en N is het aantal broedparen.
a. Schets het aantal rupsen dat een broedpaar bij aanvang van het seizoen vangt als functie van het aantal paartjes N.
b. Vereenvoudig $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ voor het geval dat er minder dan 10 broedparen zijn. Wat is nu de halfwaardetijd van de rupsen? Neemt deze toe of af met de mezen? Licht dit kort toe. Hint: de oplossing van de vergelijking voor exponentieel verval, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\delta x$, heeft de oplossing $x(t) = x(0)\mathrm{e}^{-\delta t}$.
c. Vereenvoudig $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ voor het geval dat er meer dan 10 broedparen zijn. Hoe hangt $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ af van de mezen? Geef een biologische verklaring voor je antwoord (in minder dan 50 woorden).
d. Schets het aantal rupsen in het seizoen, $R(t)$, in één grafiek voor het geval er 5, 15, en 25 broedparen zijn.

a.



b. $\frac{dR}{dt} = -dR - \frac{a}{10}RN = -\delta R$ en $\delta = d + \frac{a}{10}N$

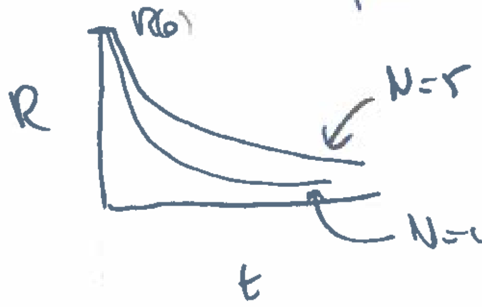
$\frac{1}{2} = e^{-\delta t} \rightarrow t = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{\ln 2}{d + (a/10)N}$

Hoe meer mezen hoe korter de Return tijd.

c. $\frac{dR}{dt} = -dR - a\frac{R}{N}N = -(a+d)R$

Dit hangt niet af van de mezen omdat de rupsen eerst over de mezen verdeeld worden en dan elke mees weer evenveel eet.

d. Dit is exponentieel verval:



N=10 en N=15 liggen op elkaar

antwoord vel

Name:
Student number:

Question 4. Vlinders en hun habitats

Hanksi beschreef het voorkomen van twee vlindersoorten in voor hun beide geschikte habitats in Finland. De vlinders migreren en kunnen door toeval in een geschikt gebiedje terechtkomen en zich daar vestigen. Omdat de eerste soort de tweede wegconcurreert als ze in hetzelfde gebied voorkomen schrijven we:

$$\frac{dP_1}{dt} = c_1 P_1(1 - P_1) - m_1 P_1 \quad \text{en} \quad \frac{dP_2}{dt} = c_2 P_2(1 - P_1 - P_2) - m_2 P_2 - c_1 P_1 P_2 \,,$$

waar P_1 en P_2 de fractie bezette habitats door soort 1 en 2 zijn. De parameters c_i staan voor kolonisatie en de m_i parameter zijn extinctie parameters.

a. Leg in minder dan 30 woorden uit waar de $c_1 P_1 P_2$ term voor staat.
b. Wat is de verwachte fractie habitats bewoond door soort 1?
c. Wat is de verwachte fractie habitats bewoond door soort 2 als soort 1 er niet is?
d. Wat is de verwachte fractie habitats bewoond door soort 2 als soort 1 er wel is?

3 a. $c_1P_1P_2$ staat voor de overname van patches bezet door soort 2 door colononisatie met soort 1.

2 b. $\dot{P}_1 = 0 \rightarrow c_1(1-P_1) = m_1 \rightarrow \bar{P}_1 = 1 - \frac{m_1}{c_1}$

1 c. $P_1 = 0 \wedge \dot{P}_2 = 0 \rightarrow \bar{P}_2 = 1 - \frac{m_2}{c_2}$

4 d. $\dot{P}_2 = 0 \rightarrow c_2(1 - \bar{P}_1 - P_2) - m_2 - c_1\bar{P}_1 = 0$

$\bar{P}_1 = 1 - \frac{m_1}{c_1} \rightarrow c_2\left(\frac{m_1}{c_1} - P_2\right) - m_2 - c_1 + m_1 = 0$

$\bar{P}_2 = \frac{m_1}{c_1} - \frac{m_2}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} + \frac{m_1}{c_2} = \frac{m_1}{c_1} - \frac{m_2}{c_2} - \frac{(c_1 - m_1)}{c_2}$

$= \frac{m_1}{c_1} + \frac{m_1 - m_2 - c_1}{c_2}$

Name:
Student number:

Question 5. Stel een model op

In de tropen groeien vijgen het hele jaar door aan grote vijgenbomen. Vijgen vallen af of worden gegeten door diverse vogelsoorten en zoogdieren. Sommige wespen leggen eieren in de vijgen die na een paar weken uitkomen. De vijgen kunnen hierdoor sneller afvallen, waarna ze op de bodem verrotten en de eieren doodgaan. Wespen die uitkomen vliegen een paar dagen rond en infecteren weer nieuwe vijgen.

Schrijf een natuurlijk model en leg kort uit wat alle termen betekenen. Je hoeft dit niet verder te analyseren.

3 $\frac{dV}{dt} = \sigma - d_V V - \beta V W$ vijgen

3 $\frac{dI}{dt} = \beta V W - d_I I$ $d_I > d_V$! (1) geïnfecteerde vijgen

3 $\frac{dW}{dt} = e I - d_w \cdot W$ wespen

α vijging $\beta V W$ infectie

$e I$ uitkomen van "eieren" uit vijg.

alle d_x termen : sterfte

5 punten voor correct SI model.