

antwoordvel

Name:

Student number:

Question 1. Bacteriën en witte bloedcellen

Bacteriën in het bloed worden opgeruimd door witte bloedcellen (neutrofielen). Neutrofielen worden aangemaakt in het beenmerg: de normale aanvoer naar het bloed is s cellen per dag en hun verblijftijd is $1/d$ dagen. Tijdens een infectie met bacteriën wordt de aanvoer van neutrofielen verhoogd volgens een conventionele verzadigingsfunctie. Bacteriën repliceren snel en groeien exponentieel. We schrijven het volgende model:

$$\frac{dB}{dt} = rB - kBN \quad \text{en} \quad \frac{dN}{dt} = s + \frac{mB}{h+B} - dN,$$

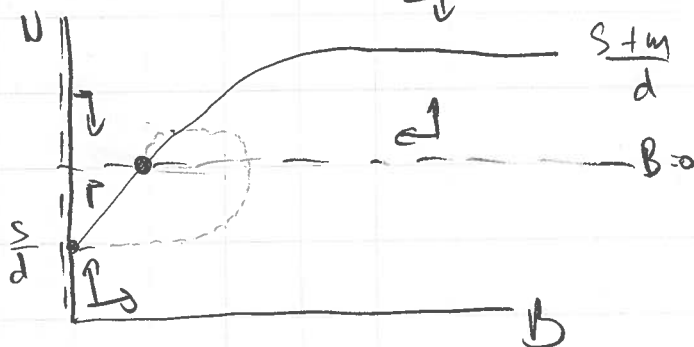
met k als 'killing rate' en B en N voor bacteriën en neutrofielen.

- 2 a. Omschrijf de betekenis van de parameter h .
 1 b. Wat is de normale hoeveelheid neutrofielen als er geen bacteriën zijn?
 3 2 c. Teken de isoclines voor de situatie dat ze elkaar snijden, geef de snijpunten langs de assen en het vectorveld.
 2 d. Bepaal voor alle evenwichten de stabiliteit.
 2 e. Beschouw een infectie met een klein aantal bacteriën en schets een representatieve trajectorie.

a. h is de bacterie dichtheid waarbij de extra migratie half maximaal is

b. $\bar{N} = s/d$

c. $\dot{B}=0 \rightarrow N = \frac{r}{k}$, $\dot{N}=0 : N = \frac{s}{d} + \frac{(m/d)B}{h+B}$



$$\begin{matrix} \dot{B} \\ \dot{N} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ +c & -d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -d < 0 \\ \lambda_2 = bc > 0 \end{matrix}$$

stabiel

d

$B=0, N=s/d$: instabiel

e. stippellijn

Name:

antwoordvel

Student number:

Question 2. Algen en fosfaat

Algen groeien in een meertje en worden beperkt door de concentratie fosfaat in het water. Fosfaat wordt opgenomen door de algen bij de celdeling. Fosfaat spoelt het meer in met een snelheid van s mol per dag, en heeft een verblijftijd van $1/d$ dagen. De replicatiesnelheid van de algen A is een verzadigingsfunctie van fosfaatconcentratie F . We schrijven het volgende model:

$$\frac{dF}{dt} = s - dF - \frac{\epsilon r A F}{h + F} \quad \text{en} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r A F}{h + F} - \delta A,$$

waar r de replicatiesnelheid, en δ de sterftesnelheid van de algen is.

- 3 a. Wat betekent de parameter ϵ ?
 2 b. Wat is de R_0 van de algen?
 3 c. Wat verwacht je voor de concentratie fosfaat als de algendichtheid de carrying capacity bereikt?
 2 d. Wat neemt het meeste toe als de aanvoer van fosfaat, s , verdubbeld; het evenwicht van het fosfaat of dat van de algen? Verklaar je antwoord.

a. de fosfaatopname per celdeling

b. r/δ of $\frac{rs}{d\delta}$

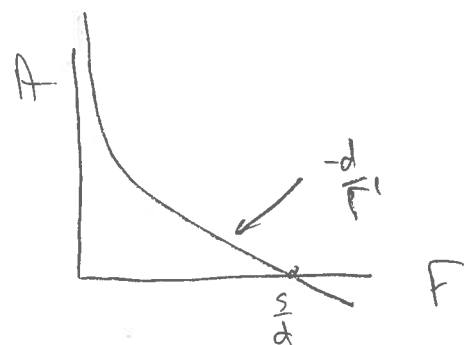
c. los \bar{F} op uit $\dot{A} = 0$: $r/\delta F = h + F$

$$F(R_0 - 1) = h \quad F = \frac{h}{R_0 - 1}$$

d. Het fosfaat hangt niet af van s , dus de algen

$$\text{odc: } 0 = s - dF - \frac{r' A F}{h + F} = sh + sF - dhF - dF^2 - (r' A F)$$

$$A = \frac{sh}{rF} + \left(\frac{s - dh}{r'} \right) - \frac{d}{r} F$$



Name:
Student number:

antwoord vel



Question 3. Muizen op eilandjes

Hanski beschreef het voorkomen van twee muizensoorten op eilandjes in een groot meer in Finland. De eilanden liggen redelijk dicht bij de kust en de afstanden tussen de eilanden is groot. Muizen bereiken de eilanden daarom vanaf de kust. Omdat de eerste soort de tweede wegconcurrert schrijven we:

$$\frac{dp_1}{dt} = c_1(1 - p_1) - m_1 p_1 \quad \text{en} \quad \frac{dp_2}{dt} = c_2(1 - p_1 - p_2) - m_2 p_2 - c_1 p_2,$$

waar p_1 en p_2 de fractie bezette eilanden door soort 1 en 2 zijn. De parameters c_i staan voor kolonisatie en de m_i parameter zijn extinctie parameters.

- 3 a. Waarom staat er zowel een $c_2 p_1$ term als een $c_1 p_2$ term in de tweede vergelijking? Gebruik maximaal 2 regels voor je antwoord.
- 2 b. Wat is de verwachte fractie eilanden bewoond door soort 1?
- 1 c. Teken de isoclines. Neem aan dat ze snijden en geef het vectorveld en de stabiliteit van het niet-triviale evenwicht.

a. De $-c_2 p_1$ term staat voor mislukte colonisaties van p_2 op eilandjes met p_1 erop. De $c_1 p_2$ term staat voor succesvolle colonisaties van p_2 eilanden door p_1

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 \\ p_1' & \begin{pmatrix} - & 0 \\ - & - \end{pmatrix} \\ p_2' & \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & - \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b. $c_1 - c_1 p_1 - m_1 p_1 = 0 \quad p_1 = \frac{c_1}{c_1 + m_1}$

c. $\dot{p}_1 = 0 \rightarrow p_1 = \frac{c_1}{c_1 + m_1}$

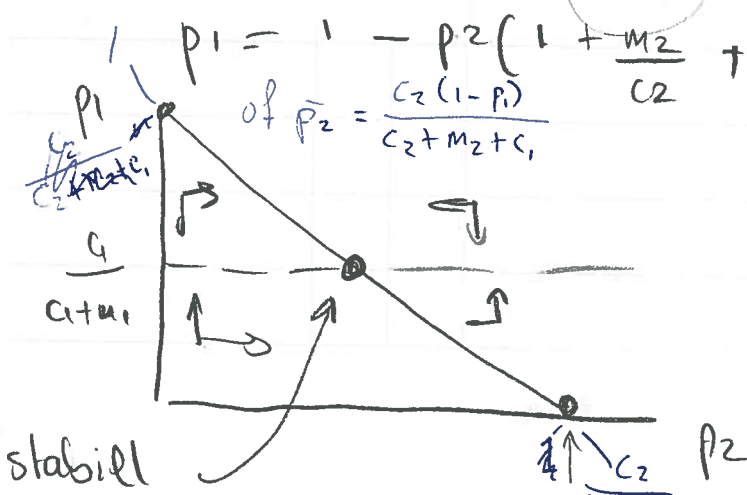
$\dot{p}_2 = 0 : c_2 - c_2 p_1 - c_2 p_2 - m_2 p_2 - c_1 p_2 = 0$

$p_1 = 1 - p_2 \left(1 + \frac{m_2}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} \right)$
 of $p_2 = \frac{c_2(1-p_1)}{c_2 + m_2 + c_1}$

$$1 - p_2 \left(\dots \right) = 0$$

$$p_2 = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{c_2} + \frac{c_1}{c_2}}$$

$$= \frac{c_2}{c_2 + m_2 + c_1}$$



Name:

Student number:

antwoord vel

Question 4. Stel een model op

Schrijf een eenvoudig model voor het volgende systeem. Je hoeft dit niet verder te analyseren.

Muggen leggen eieren in een slootje. De eieren groeien uit tot larven die na een paar dagen ontpoppen tot muggen die weer eieren leggen. De larven worden gegeten door visjes die voor hun groei volledig van de larven afhankelijk zijn. Schrijf 4 differentiaalvergelijkingen (voor de eieren, larven, muggen en vissen).

$$\dot{E} = aM - bE - d_1E$$

$$\dot{L} = bE - cL - d_{LV} - d_{2L}$$

$$\dot{M} = cL - eM$$

$$\dot{V} = fLV - gV$$